# Raisonnement mathématique et enjeux socio-écologiques

Marco ROBALO

SORBONNE UNIVERSITÉ

« **Le changement climatique n'est pas le problème, c'est un symptôme.** »

Dennis Meadows - co-auteur du Rapport Meadows, 1972

« **Le rôle de la formation au 21e siècle doit également être interrogé : Comment répondre aux défis sociétaux pour de jeunes adultes qui sortent du lycée ? L'Université doit, dès le début de leurs études, leur délivrer un message clair sur le respect de l'environnement, le changement du climat, la biodiversité et le développement soutenable.** »

Valérie Masson-Delmotte- co-présidente du groupe no 1 du GIEC

« **La transition écologique est un projet de société, ambitieux et complexe. Il concerne l'ensemble de la population et des organisations et doit être appréhendé dans sa complexité. Sans cela, il est illusoire d'espérer approcher l'objectif commun d'un système économique et social décarboné et résilient.** »

The Shift Project- Former l'ingénieur du XXIe siècle.

« **Enseignement supérieur : seuls 15% des établissements prêts à former l'ensemble de leurs étudiants aux enjeux écologiques** »

Manifeste étudiant pour un « réveil écologique »

« **Le virus circule à un niveau élevé et nous sommes sur un plateau montant, qui augmente de 10% par semaine... La grande différence aujourd'hui est que la dynamique n'est pas exponentielle.** »

Olivier Véran, Ministre des Solidarités et de la Santé. (voir l'Exemple 4.2.15).

# Descriptif du Cours

Ce cours est destiné aux étudiants de première année de la Faculté des Sciences de la Sorbonne Université. **Son principal objectif est de fournir des outils de raisonnement mathématique et des intuitions nécessaires pour comprendre les enjeux socio-écologiques du XXIe siècle.**

Comprendre et résoudre les défis posés par le changement climatique et la transition énergétique exige des raisonnements mathématiques nuancés. Notre principal objectif est la demonstration du Théorème 2.3.3 et d'explorer ces consequences à travers des exemples et des simulations numériques.

**Bibliographie principale :**


— Godement, Roger. Analysis I. Vol. 1. Springer Science & Business Media, 2004.

— Rapport du GIEC AR6 Climate Change 2021:The Physical Science Basis

— The Feynman Lectures on Physics Vol I

— Faraoni, Valerio. Exercises in environmental physics. New York, NY : Springer New York, 2006.

— Murphy, Thomas W. Energy and Human Ambitions on a Finite Planet. eScholarship, University of California, 2021.

— García, Juan Martín. Theory and practical exercises of system dynamics : modeling and simulation with Vensim PLE. Preface John Sterman. Juan Martin Garcia, 2020.

# Table des matières


**1 Bases du raisonnement mathématique** **1**
1.1 Calcul du périmètre de la planète . . . . . 1
1.2 Existence d'une infinité de nombres premiers. . . . . 9
1.3 Mécanisme de récurrence : pourquoi ça marche ? . . . . . 13
1.4 Exercices . . . . . 16

**2 Enjeux énergie-climat** **19**
2.1 Quelques données graphiques . . . . . 19
2.2 Une vision systémique. . . . . 33
2.3 L'objectif du cours. . . . . 39

**3 Analyse de fonctions** **42**
3.1 Introduction. . . . . 42
3.2 Connexité des nombres réelles . . . . . 45
3.3 Suites . . . . . 51
3.4 Fonctions continues et le théorème des valeurs intermédiaires. . . . . 55
3.5 Existence des racines $n$-ièmes . . . . . 66
3.6 Existence de maximum et minimum . . . . . 68
3.7 Taux de Variation et la fonction dérivée . . . . . 71
3.8 Séries, intégration et le pic du pétrole . . . . . 83
3.9 Exercices . . . . . 87

**4 Exponentielle et Logarithme** **91**
4.1 Ordres de grandeur . . . . . 91
4.2 Construction de la fonction exponentielle . . . . . 103
4.3 La fonction logarithme et l'échelle logarithmique . . . . . 113
4.4 Boucles de renforcement, l'exponentielle et la méthode d'Euler . . . . . 115
4.5 Mécanisme de réchauffement climatique par effet de serre. . . . . 132
4.6 Croissance économique et les limites physiques. . . . . 134
4.7 Exercices . . . . . 137

**5 Équations différentielles et modélisation de systèmes sócio-écologiques** **139**
5.1 Premiers exemples : modèle exponentiel . . . . . 139
5.2 Modèle Logistique . . . . . 145
5.3 Systèmes avec délai de réponse . . . . . 155
5.4 Modèles population - ressources finies . . . . . 158
5.5 Modèles proie-prédateur . . . . . 165
5.6 Modèle épidémiologique SIR . . . . . 169
5.7 Exercices . . . . . 171

# Bases du raisonnement mathématique

L'objectif de ce chapitre est d'illustrer ce qui caractérise les connaissances mathématiques. Nous voulons montrer comment la connaissance mathématique peut être découverte, produite, écrite, présentée et organisée, ainsi que ses applications et ses limites.

## 1.1. Calcul du périmètre de la planète

Il y a 2300 ans, Ératosthène a astucieusement calculé le périmètre de la Terre. Nous présenterons ici une version simplifiée.

Nous recommandons d'abord la visualisation de la vidéo suivante.

Voici un premier fait dont il était au courant :

**Fait 1.1.1 (Observation physique)**

À midi du premier jour de l'été, dans la ville de Syène où il habitait, aucun bâtiment ne projetait de l'ombre.

Pour calculer le diamètre de la Terre, il lui a suffi de se rendre dans la ville d'Alexandrie, à 800 km au nord, également le premier jour de l'été, et de mesurer l'ombre d'un bâtiment dont il connaissait la hauteur, ainsi que l'angle $\alpha$ entre les deux.

À l'époque, il n'était pas encore possible de confirmer par observation que la Terre était ronde. Il a donc dû la considérer comme une hypothèse. Voici les hypothèses adoptées pour compléter son raisonnement :

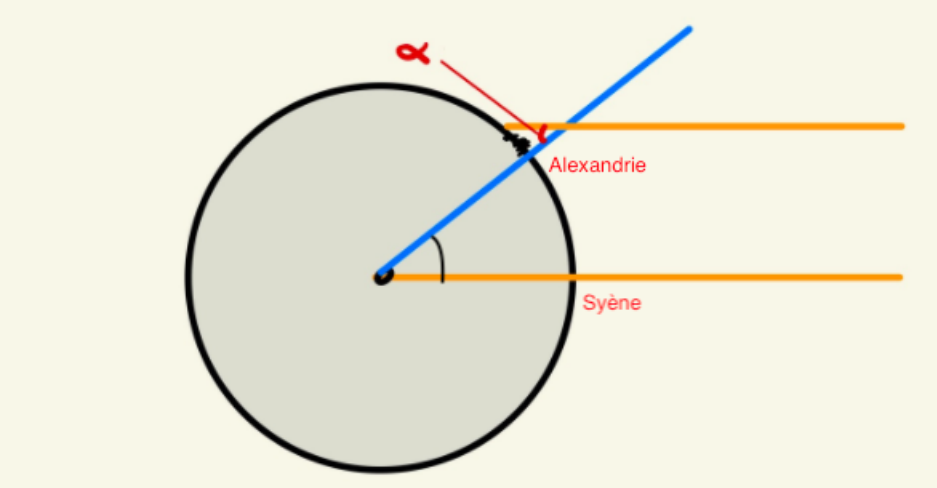
**Hypothèse 1.1.2**

La Terre est ronde.

**Hypothèse 1.1.3**

La Terre est suffisamment éloignée du Soleil pour que tous les rayons lumineux qui arrivent soient parallèles.

L'image suivante résume la géométrie du problème :

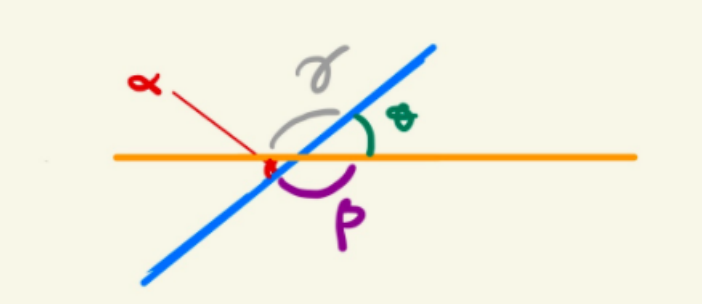



Les deux lignes orange représentent les rayons parallèles de lumière du soleil. La ligne bleue représente l'axe du bâtiment à Alexandrie. En rouge, on trouve l'angle $\alpha$ entre le bâtiment et l'ombre. Au centre, se trouve l'angle entre les deux villes.

L'astuce de ce problème réside dans la compréhension que l'angle $\alpha$ coincide aussi avec l'angle au centre de la Terre entre les deux villes. Voici pourquoi. Pour commencer, examinons l'angle $\alpha$.

**Remarque 1.1.4**

Considérons la configuration géométrique suivante :




Un simple argument géométrique nous permet de montrer que $\alpha$ et $\theta$ sont identiques. En effet, nous avons l'équation

$$\alpha + \gamma = \beta + \theta = 180^\circ$$

sur la ligne bleue. De la même façon, sur la ligne orange

$$\alpha + \beta = \gamma + \theta = 180^\circ$$

Donc

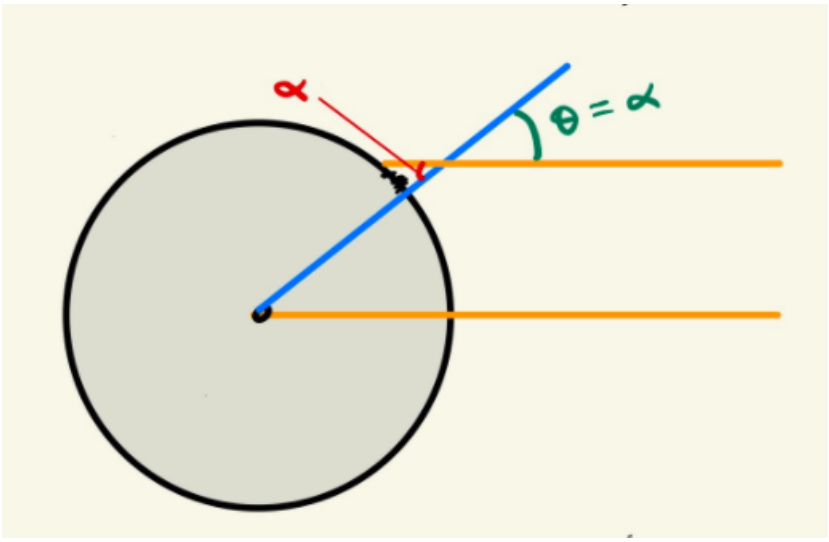
$$\alpha + \gamma = \theta + \gamma$$

d'où

$$\alpha = \theta$$

.

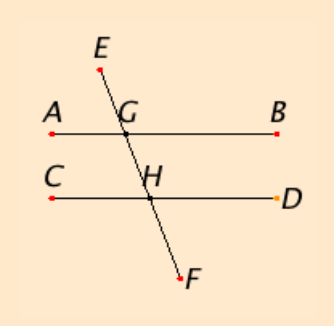
Avec la Remarque 1.1.4 nous avons donc amélioré notre compréhension de la situation géométrique :




Pour conclure, nous aurons besoin d'un autre résultat mathématique :

**Proposition 1.1.5 (Elèments d'Euclide, Prop. 29)**

Si deux lignes parallèles sont coupés par une transversale



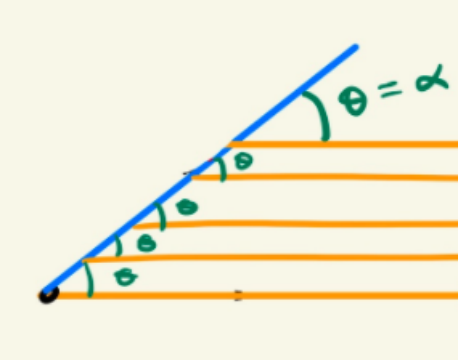

alors les angles correspondants sont identiques, c'est à dire,

$$\widehat{EGA} = \widehat{EHC}$$

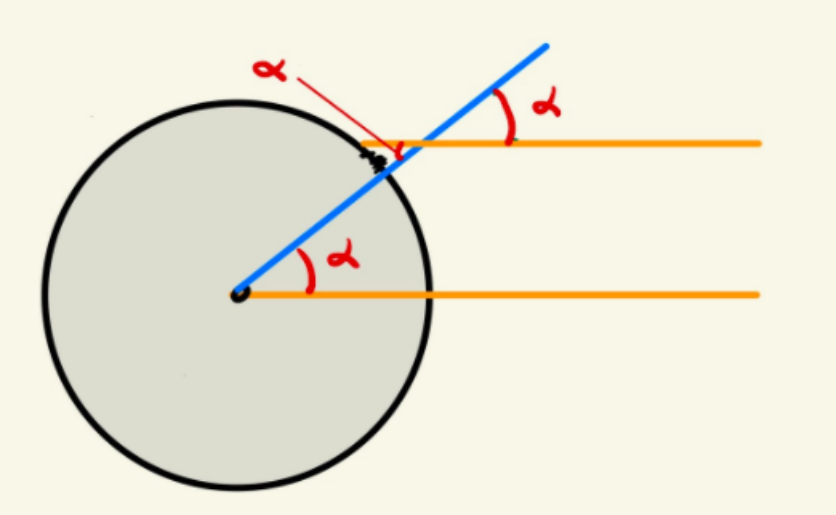
$$\widehat{EGB} = \widehat{EHD}$$

$$\widehat{AGH} = \widehat{GHD}$$

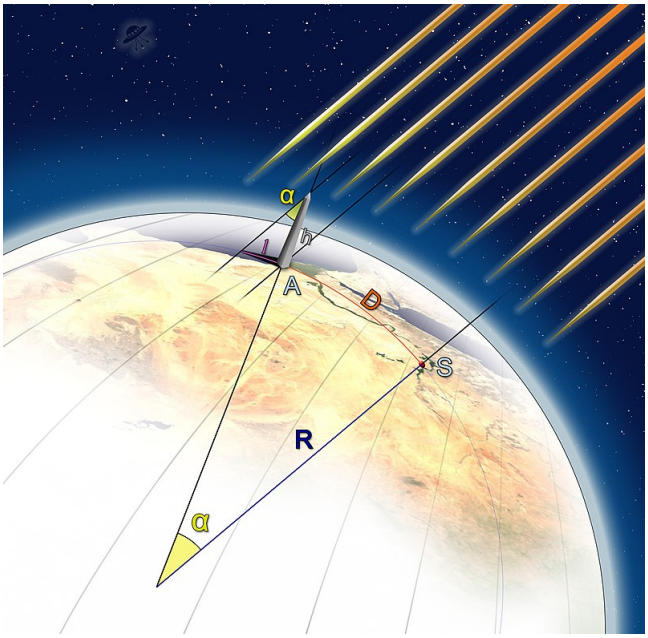
La Proposition 1.1.5 implique que, puisque les rayons du soleil sont parallèles par l'Hypothèse 1.1.3, leur intersection avec l'axe du bâtiment produira toujours le même angle.




Nous arrivons donc à la situation géométrique suivante :




et voici donc un résumé du problème




Enfin, Ératosthène a mesuré l'angle $\alpha$ et a trouvé :

$$\alpha = 7.2^\circ = 0.125664\, rad$$

En utilisant la distance entre les deux villes à la surface de la Terre, il a calculé le périmètre :

$$P = (\frac{2\pi}{\alpha}) * 800 \sim 40000 Km$$

**Remarque 1.1.6**

Connaissant le périmètre, nous pouvons calculer le rayon de la planète :

$$R = \frac{P}{2\pi} \sim 6000\,Km$$

Pour avoir une idée de l'échelle, voici une liste de distances équivalentes :

— 6 fois la distance Lille-Montpellier.
— 600 fois la distance Porte de la Chapelle - Porte d'Orléans.
— 1,5% de la distance Terre-Lune.

**Remarque 1.1.7**

En réalité, le rayon est de 6371 km. Le calcul que nous venons de faire est donc d'une précision impressionnante. Il faut garder à l'esprit qu'il a été réalisé il y a 2300 ans ! Pendant près de 2000 ans, cette connaissance n'a pratiquement eu aucun impact sur la civilisation humaine, mais 2000 ans plus tard, il est difficile d'imaginer le monde sans cette découverte.

Cela nous amène à réfléchir à la valeur des connaissances, indépendamment de leurs applications directes et immédiates.

Nous allons maintenant examiner de plus près notre calcul. Nous avons formulé deux hypothèses (Hypothèse 1.1.2 et Hypothèse 1.1.3) et utilisé la Proposition 1.1.5.

Pourquoi des mots différents : *Hypothèses* et *Proposition* ?

La différence est très importante en mathématiques :

— Les *Hypothèses* sont les considérations que nous sommes prêts à admettre (les *briques de Lego*).

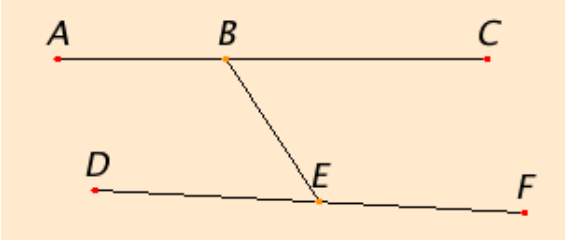
— Lorsque nous qualifions quelque chose de *Proposition*, *Lemme* ou *Théorème*, cela indique que son contenu peut être dérivé ou prouvé à partir de briques de Lego plus simples (les hypothèses).

Par exemple, lorsque nous qualifions le contenu de 1.1.5 de *Proposition*, le lecteur doit attendre de l'auteur une argumentation convaincante, expliquée en termes d'axiomes ou d'autres propositions qui ont elles-mêmes été préalablement démontrées.

il est donc nécessaire d'expliquer pourquoi nous avons qualifié 1.1.5 de *Proposition*. Pour ce faire, nous devrons introduire un nouvel axiome qui servira de fondement :

**Axiome 1.1.8 (Axiome des parallèles)**

Si une droite coupe deux autres droites en formant deux angles internes dont la somme est différente de $180°$,



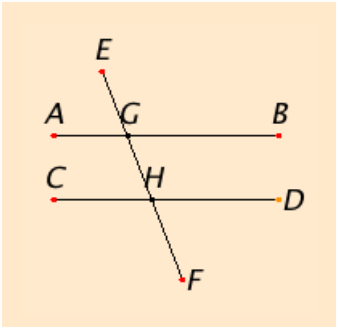

$$\widehat{ABE} + \widehat{BFD} \neq 180°$$

Alors les deux droites se croisent dans le demi-plan où la somme des angles est inférieure à $180°$ (ici, du côté de A et D).

Preuve par contradiction

**Preuve 1.1.9**

Voici la preuve de la Proposition 1.1.5 en utilisant l'Axiome 1.1.8. Par le même argument utilisé dans la Remarque 1.1.4, on sait que dans




on a

$$\widehat{EGA} = \widehat{EGH}\ ,\ \widehat{EGB} = \widehat{AGH}\ ,\ \widehat{GHC} = \widehat{DHF}\ ,\ \widehat{GHD} = \widehat{CHF}$$

Pour montrer la Proposition 1.1.5 il suffit donc de montrer que

$$\widehat{AGH} = \widehat{GHD}$$

Nous utilisons donc un raisonnement par l'absurde (voir Exercice 1.4.1) : supposons que

$$\widehat{AGH} \neq \widehat{GHD}$$

Alors, en ajoutant l'angle $\widehat{BGH}$ de chaque côté, on a

$$\widehat{AGH} + \widehat{BGH} \neq \widehat{GHD} + \widehat{BGH}$$

et du côté gauche, nous obtenons $180°$

$$180° = \widehat{AGH} + \widehat{BGH} \neq \widehat{GHD} + \widehat{BGH}$$

Par lAxiome 1.1.8 il en résulte que les droites $AB$ et $CD$ se coupent obligatoirement. Mais c'est une contradiction puisque nous supposons que les deux sont parallèles.

Donc, les angles $\widehat{AGH}$ et $\widehat{GHD}$ doivent être identiques.

Bref, voici donc, finalement le théorème d'Ératosthène dont nous avons maintenant terminé la preuve.

**Théorème 1.1.10 (Théorème d'Ératosthène)**

Si effectivement la Terre est ronde (Hypothèse 1.1.2) et suffisamment loin du soleil pour que tous les rayons lumineux qui arrivent soient parallèles (Hypothèse 1.1.3) alors l'axiome des parallèles (Axiome 1.1.8) implique que le périmètre est d'environ $40\,000\,Km$.

**Remarque 1.1.11**

En effet, le théorème d'Ératosthènes ne montre pas que la terre est ronde. Il suppose que la terre est ronde et sous cette hypothèse, calcule le périmètre.

## 1.2. Existence d'une infinité de nombres premiers.

Pourquoi faut-il être formel et prudent avec le choix des mots utilisés ? Dans l'exemple précédent, tout revenait à jouer avec des angles et des lignes parallèles, de sorte qu'un argument visuel aurait été suffisant pour convaincre quelqu'un. Mais parfois, nous voulons être capables d'énoncer, avec la même précision, des vérités sur des objets qui sont difficiles à visualiser. Voici un exemple.

Pour être sûr que nous parlons tous de la même chose, nous déclarons quelle définition nous utilisons. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \, etc\}$$

**Définition 1.2.1**

Un nombre premier est un nombre naturel non-nul dont les seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

**Exemple 1.2.2**

Les nombres 6 et 10 ne sont pas des nombres premiers car ils peuvent s'écrire respectivement comme 2x3 ou 2x5. Listons les nombres premiers plus petits que 200 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197 et 199.

La liste se poursuit. La question est de savoir si elle s'arrête jamais. La réponse est négative :

**Théorème 1.2.3 Euclide, 300 AC**

Il existe une infinité de nombres premiers

À partir de ce moment, le lecteur a le droit d'exiger une preuve/explication convaincante du contenu de 1.2.3.

Pour expliquer notre argument en faveur de la vérité de 1.2.3, nous devons en apprendre un peu plus sur les nombres premiers. L'ingrédient fondamental de notre argumentation est le résultat suivant :

**Proposition 1.2.4 ( décomposition en produit de facteurs premiers)**

Tout entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon, à l'ordre près des facteurs.

Nous ayons compliqué notre situation, car maintenant il faut aussi une justification pour 1.2.4.

**Exemple 1.2.5**

Nous pouvons tester 1.2.4 sur quelques exemples concrets. Par exemple :

- 2 est premier
- 3 est premier
- 4=2x2 donc produit des nombres premiers.
- 5 est premier
- 6=2x3=3x2 (décomposition unique à l'ordre près des facteurs).
- 7 est premier
- 8=4x2=2x2x2 donc produit des nombres premiers.
- 9=3x3 donc produit des nombres premiers.
- 10= 5x2 = 2x5.
- 11 est premier.
- ...
- 540= (3x3x3)x(2x2)x5.
- etc.

**Remarque 1.2.6**

Malheureusement, les essais sur des exemples concrets dans l'Exemple 1.2.5 ne suffisent pas à démontrer l'ampleur de notre affirmation 1.2.4. Sont contenu est beaucoup plus audacieux, il dit que cette décomposition est possible pour n'importe quel nombre $x$ choisi au hasard. À savoir, que, étant donné $x$, il existe une choix unique des nombres premiers $p_1$, $p_2$, $p_3$, ..., $p_n$, et des ordres de répétion $m_1, ..., m_n$ tels que

$$x = \underbrace{(p_1 * p_1 * ... * p_1)}_{m_1 \text{ fois}} * \underbrace{(p_2 * p_2 * ... * p_2)}_{m_2 \text{ fois}} * ... * \underbrace{(p_n * p_1 * ... * p_n)}_{m_n \text{ fois}}$$

Pour le prouver, nous devrons concevoir un argument qui nous évite de tester les nombres un par un, car cette tâche prendrait une infinité d'étapes et serait impossible même pour un ordinateur.

Laissons la preuve de la Proposition 1.2.4 pour la prochaine section car il nous faudra une nouvelle technique mathématique pour l'établir. Pour le moment, expliquons simplement comment utiliser la Proposition 1.2.4 pour montrer le Théorème 1.2.3 :

**Preuve 1.2.7**

Ici on donne une preuve du Théorème 1.2.3 en admettant la Proposition 1.2.4 comme une boîte noire. En d'autres termes, nous utilisons le fait que chaque nombre entier naturel admet une décomposition en nombres premiers pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Avant d'écrire le cas général, exposons l'idée. Supposons pour un instant qu'il n'y avait que deux nombres premiers, $\{3, 5\}$. Nous pourrions les multiplier et obtenir $3 \times 5 = 15$. Le prochain multiple de $3$ est $15 + 3 = 18$ et le prochain multiple de $5$ est $15 + 5 = 20$. Prenons donc $15 + 1 = 16$ qui ne peut pas être un multiple ni de $3$ ni de $5$. Par la Proposition 1.2.4 on sait que $16$ admet une décomposition en produit de nombres premiers, ici facile de trouver $16 = 4x4 = 2x2x2x2 = 2^4$. Mais regardez ! Le nombre premier qui figure dans la décomposition première de $16 = (3x5) + 1 = 2^4$, $p = 2$, n'est pas dans la liste initiale des nombres premiers avec laquelle nous avons commencé, $\{3, 5\}$.

La preuve d'Euclides consiste à montrer que cet argument tient en toute généralité. Voici le cas général. Nous allons montrer qu'étant donné n'importe quelle liste finie de nombres premiers

$$L := \{p_1 \ , \ p_2 \ , \ \dots \ , \ p_n\}$$

il existe un nombre premier qui ne fait pas partie de cette liste. Cela nous prouvera que la liste des nombres premiers ne peut pas être finie.

Sans perdre la généralité, nous pouvons supposer que les nombres premiers de la liste $L$ sont ordonnés, c'est-à-dire,

$$p_n > p_{n-1} > .... > p_2 > p_1$$

Considérons alors le produit de tous les nombres premiers dans $L$ :

$$q := \prod_{p \in L} p = p_1.p_2....p_n$$

Par construction, pour chaque $i$, $p_i$ divise $q$,

$$p_i | q$$

En d'autres termes, $q$ est un multiple de chaque $p_i$. Il en résulte que pour chaque $i$, le plus petit multiple $p_i$ après $q$ est $q + p_i$.
Dans ce cas, on considère le nombre

$$N := q + 1$$

Il est donc vrai par construction que $N > 1$, et qu'aucun des $p_i$ divise $N$ (car les prochains multiples de $p_i$ seraient $N + p_i$).

Par la Proposition 1.2.4 $N$ doit posséder une décomposition en produits de nombres premiers. En particulier, il existe un nombre premier $p$ qui divise $N$.
Ce nombre premier $p$ ne peut pas faire partie de la liste originale $L$ puisque, par construction, aucun des $p_i$ divise $N$. On a donc trouvé un nombre premier $p$ qui n'était pas dans la liste $L$.

**Remarque 1.2.8**

On peut imaginer une preuve comme la construction d'un chemin reliant le point de départ - nos suppositions et hypothèses - au point final, la conclusion du théorème. De la même façon qu'il peut y avoir plusieurs chemins entre deux endroits, il peut y avoir plusieurs preuves complètement différentes d'un même théorème. Voir ici pour d'autres preuves du Théorème 1.2.3

**Exemple 1.2.9**

Voici quelques exemples du fonctionnement de l'algorithme de la preuve pour produire de nouveaux nombres premiers :

— Si $L = \{2, 3\}$, on obtient $N = 7$ qui est premier.
— Si $L = \{2, 5\}$, on obtient $N = 11$ aussi premier.
— Si $L = \{3, 5\}$, on obtient $N = 14 = 2^4$, donc $p = 2$.
— Si $L = \{3, 5, 7\}$, on obtient $N = 106 = 53 \times 2$ donc on obtient les nombres premiers $p = 53$ et $p = 2$.
— Si $L = \{2, 5, 7\}$, on obtient $N = 71$ premier.

**Remarque 1.2.10**

Comme dans la Remarque 1.1.7 nous devons nous arrêter un instant pour méditer sur le fait que le Théorème 1.2.3 est connue depuis plus de 2000 ans. Pendant la majorité de cette durée, ça n'a pas eu pratiquement aucun impact significatif sur la vie humaine ni sur l'économie et est passée comme une curiosité inaperçue. 2000 ans plus tard, elle s'est révélée comme la base de la cryptographie.

Même si le contenu du Théorème 1.2.3 ou du Théorème 1.1.10 ne nous intéresse pas, ces exemples doivent nous apprendre que :

— l'échelle de temps et le rythme du progrès scientifique peuvent être très différents de l'échelle de temps des exigences de la société humaine moderne.

— ce n'est pas parce qu'un fait scientifique n'a pas d'application aujourd'hui que nous devons discréditer son avenir.

— ce n'est pas parce qu'un phénomène semble trop formel qu'il ne trouvera pas d'applications très concrètes.

## 1.3. Mécanisme de récurrence : pourquoi ça marche ?

Notre preuve du Théorème 1.2.3 repose sur la véracité de la Proposition 1.2.4 qui reste encore à prouver. C'est l'objectif de cette partie.

**Remarque 1.3.1**

Reprenons la liste de l'Exemple 1.2.5. Elle nous montre que le résultat de la Proposition 1.2.4 est vrai au moins pour tous les entiers naturels inférieurs à 11. Est-ce que c'est vrai pour 12 ? En effet oui, car 12=6x2 mais 6 est déjà sur la liste de l' Exemple 1.2.5 et donc admet une décomposition en facteurs premiers, à savoir 3x2. Donc 3x2x2 est la décomposition de 12 en nombres premiers.

Ce même argument peut être utilisé pour démontrer le résultat suivant :

**Lemme 1.3.2**

Soit $N$ un entier naturel et supposons que la conclusion de la Proposition 1.2.4 est vrai pour tous les nombres naturels de la liste des nombres inférieurs à $N$. Alors la conclusion de la Proposition 1.2.4 est aussi vrai pour $N$.

*Démonstration.* Le nombre $N$ n'a que deux possibilités. Soit il est premier, soit il ne l'est pas.

- Si $N$ est premier, nous n'avons rien à faire, puisqu'il admet automatiquement une factorisation en nombres premiers, à savoir lui-même seul.
- Si $N$ n'est pas premier, alors par définition, cela signifie qu'il existe deux nombres $a$ et $b$, strictement plus petits que $N$, et tels que $a * b = N$. Donc, $a$ et $b$ font partie de la liste des nombres inférieurs à $N$. Mais par hypothèse, nous sommes en train de supposer que la conclusion de la Proposition 1.2.4 est valable pour tous les nombres inférieurs à $N$, donc en particulier, pour $a$ et pour $b$.

  Cela signifie que $a$ peut être décomposé de manière unique comme un produit de nombres premiers $\{p_1, ..., p_n\}$

  $$a = p_1^{m_1}.p_2^{m_2}...p_n^{m_n}$$

  et la même chose pour $b$ avec nombres premiers $\{q_1, ..., q_k\}$

  $$b = q_1^{l_1}.q_2^{l_2}...q_n^{l_k}$$

  Donc $N = a * b$ admet aussi une décomposition en produit de nombres premiers

  $$N = p_1^{m_1}.p_2^{m_2}...p_n^{m_n}.q_1^{l_1}.q_2^{l_2}...q_n^{l_k}$$

□

On n'a pas encore démontré la Proposition 1.2.4. Récapitulons ce que nous savons à présent.

**Définition 1.3.3**

Posons pour chaque entier naturel $N$, une nouvelle proposition $P(N)$ suivant

$$P(N) = \text{ Le résultat de la Proposition 1.2.4 est vrai pour } N$$

**Remarque 1.3.4**

En utilisant la terminologie de la Définition 1.3.3 , le résultat du Lemma 1.3.2 peut être lu comme :

— Soit $N$ un entier naturel. Alors si $P(M)$ est vrai pour tout $M < N$ alors $P(N)$ est vrai.

Nous aimerons utiliser directement la formulation de la Remarque 1.3.4 pour conclure que le résultat est vrai pour tout entier naturel $N$. Mais en fait, pour le rendre vrai, nous sommes obligés d'imposer une propriété des nombres naturels

**Axiome 1.3.5**

Toute sous-ensemble $S$ non-vide de nombres entiers naturels admet un minimum. [a]

*a.* Le minimum est nécessairement unique. Voire l'Exercice 1.4.7.

**Théorème 1.3.6 Principe de raisonnement par récurrence**

Pour chaque nombre entier $N$, soit $P(N)$ une proposition concernant le nombre entier $N$.

— Supposons que si $P(M)$ est vrai pour tout $M < N$ alors $P(N)$ est vrai.

Alors, $P(N)$ est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$.

*Démonstration.* la preuve de cette affirmation repose sur l'Axiome 1.3.5. Supposons par l'absurde que l'une des $P(n)$ est fausse pour un certain $n$. Alors l'ensemble de nombres naturels

$$S = \{n : P(n) \text{ est fausse}\}$$

est non-vide. Donc $S$ contient un minimum $m$. En particulier, si $n \in S$ alors $n \geq m$. Donc, par définition de $S$, $P(n)$ est vrai pour tout $n < m$. Mais alors par hypothèse, $P(m)$ est aussi vrai et donc on a trouvé une contradiction.

□

**Remarque 1.3.7**

L'Axiome 1.3.5 utilisé dans la preuve du principe de récurrence (Théorème 1.3.6) est la vrai magie caché derrière. L'Axiome 1.3.5 peut être aussi présenté comme un théorème, selon le point de départ que nous prenons pour définir les nombres naturels. Nous ne traiterons pas ce sujet ici mais le lecteur curieux peut essayer de prouver le fait suivant : Le principe de récurrence est en fait équivalent à l'Axiome 1.3.5 .

**Exemple 1.3.8**

On montre par récurrence en $N \geq 0$, la formule

$$\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

Pour $N = 0$ la formule est vrai car on a $0$ de chaque côté. Pour $N = 1$, aussi car on a $1$ de chaque côté. Supposons maintenant que la formule est vrai pour tout $M < N$. En utilisant la formule pour $M = N - 1$ on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N} n = \sum_{n=0}^{N-1} n + N = \frac{(N-1)(N)}{2} + N = \frac{N^2 - N + 2N}{2} = \frac{N^2 + N}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$$

**Preuve 1.3.9**

Voici finalement la preuve de la Proposition 1.2.4. On applique le principe de récurrence (Théorème 1.3.6) au résultat du Lemma 1.3.2 pour conclure que la Proposition 1.2.4 est vrai pour tout nombre entier naturel.

À ce stade, nous avons finalement présenté des arguments pour justifier toutes nos affirmations.

## 1.4. Exercices

Pour chaque exercice, trouver une preuve, en précisant bien les définitions et les axiomes utilisés et le chemin d'argumentation suivi :

Ajouter des exercices de logique et raisonemment mathematique

**Exercice 1.4.1**

Soit $P$ et $Q$ deux propositions. On appelle implication de $Q$ par $P$ la proposition $(non P)$ ou $Q$. Cette proposition se note $P \Rightarrow Q$. Montrer que

$$P \Rightarrow Q \text{ si et seulement si (non } Q) \Rightarrow (\text{ non } P)$$

**Exercice 1.4.2**

Quatre cartes comportant un chiffre sur une face et une couleur sur l'autre sont disposées à plat sur une table. Une seule face de chaque carte est visible. Les faces visibles sont les suivantes : 5, 8, bleu, vert. Quelle(s) carte(s) devez-vous retourner pour déterminer la véracité de la règle suivante : si une carte a un chiffre pair sur une face, alors elle est bleue sur l'autre face. Il ne faut pas retourner de carte inutilement, ni oublier d'en retourner une.

**Exercice 1.4.3**

Parmi toutes les propositions suivantes, regrouper par paquets celles qui sont équivalentes :

1. Tu auras ton examen si tu travailles régulièrement.
2. Pour avoir son examen, il faut travailler régulièrement.
3. Si tu ne travailles pas régulièrement, tu n'auras pas ton examen.
4. Il est nécessaire de travailler régulièrement pour avoir son examen.
5. Pour avoir son examen, il suffit de travailler régulièrement.
6. Ne pas travailler régulièrement entraîne un échec à l'examen.
7. Si tu n'as pas ton examen, c'est que tu n'as pas travaillé régulièrement.
8. Travail régulier implique réussite à l'examen.
9. On ne peut avoir son examen qu'en travaillant régulièrement

**Exercice 1.4.4**

Soit $x$ un nombre entier :

1. Montrer que si $x$ est impaire alors $x^3$ est impaire.
2. Montrer que $x(1+x)$ est toujours un nombre pair.
3. Montrer que si $x^2$ est pair alors $x$ est pair.

**Exercice 1.4.5**

Montrer que si $x$ est un nombre rationnel et $y$ est un nombre irrationnel, alors $x+y$ est irrationnel.

**Exercice 1.4.6**

Comme dans Exemple 1.2.9 appliquer l'algorithme de la preuve du Théorème 1.2.3 pour trouver le nouveau nombre premier produit par la liste de nombres premiers $L = \{5, 7, 11\}$.

**Exercice 1.4.7**

Montrer que le plus petit élément d'un ensemble non vide d'entiers positifs est unique.

**Exercice 1.4.8**

Fixons un nombre réel $x \neq 1$. Utiliser l'énoncé du Théorème 1.3.6 pour montrer que pour tout $n > 0$ on a la formule

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

**Exercice 1.4.9**

Trouver une formule pour

$$\frac{1}{1 * 2} + \frac{1}{2 * 3} + ... + \frac{1}{n * (n + 1)}$$

par récurrence.

**Exercice 1.4.10**

Soit $n$ un nombre naturel. On pose $10^n = \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n \text{ fois}}$. Montrer par récurrence que $10^n > n$.

**Exercice 1.4.11**

Est-ce que la preuve suivante est correcte ? Si non, où est l'erreur ?

Énoncé : Dans un groupe de $n$ personnes, toutes ont le même nom.

Preuve : Pour $n = 1$ c'est vrai. Supposons un groupe de $n + 1$ personnes $\{P_1, P_2, ..., P_{n+1}\}$ et supposons par récurrence que l'énoncé est vrai pour chaque groupe de $n$ personnes. En prenant les $n$ premières $\{P_1, .., P_n\}$ par hypothèse de récurrence elles ont toutes le même nom. De la même façon en prenant les $n$ dernières $\{P_2, .., P_{n+1}\}$ par hypothèse de récurrence elles ont aussi toutes le même nom. Puisque le groupe du milieu $\{P_2, .., P_n\}$ appartient aux deux groupes ($n$ premières et $n$ dernières) les deux noms possibles doivent coïncider.

**Exercice 1.4.12**

Étant donné $A$, $B$ deux parties d'un ensemble $E$, montrer que :

$$A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$$

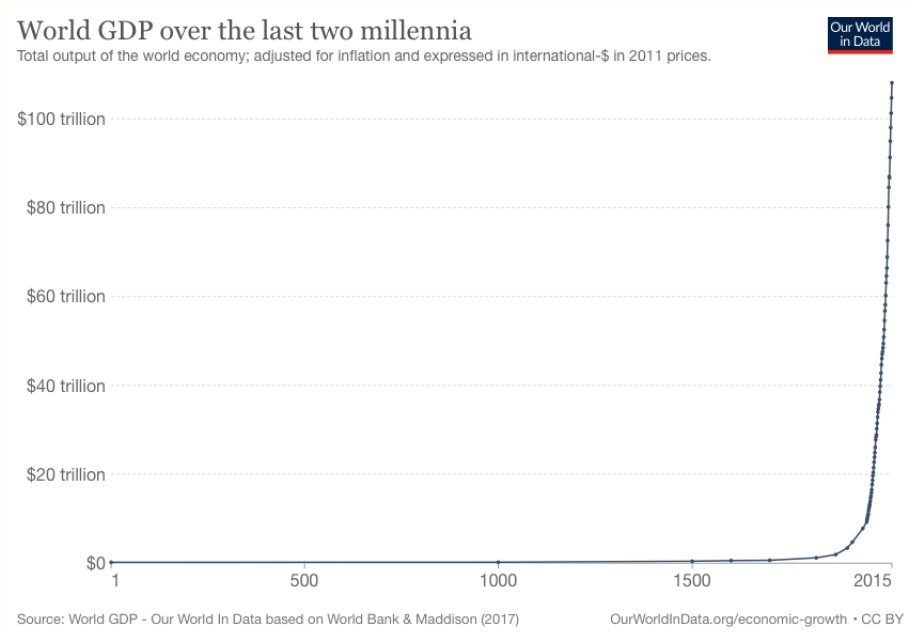
# Enjeux énergie-climat

## 2.1. Quelques données graphiques

La compréhension des défis climatiques et énergétiques, nécessite beaucoup de données différentes. Voici quelques exemples :

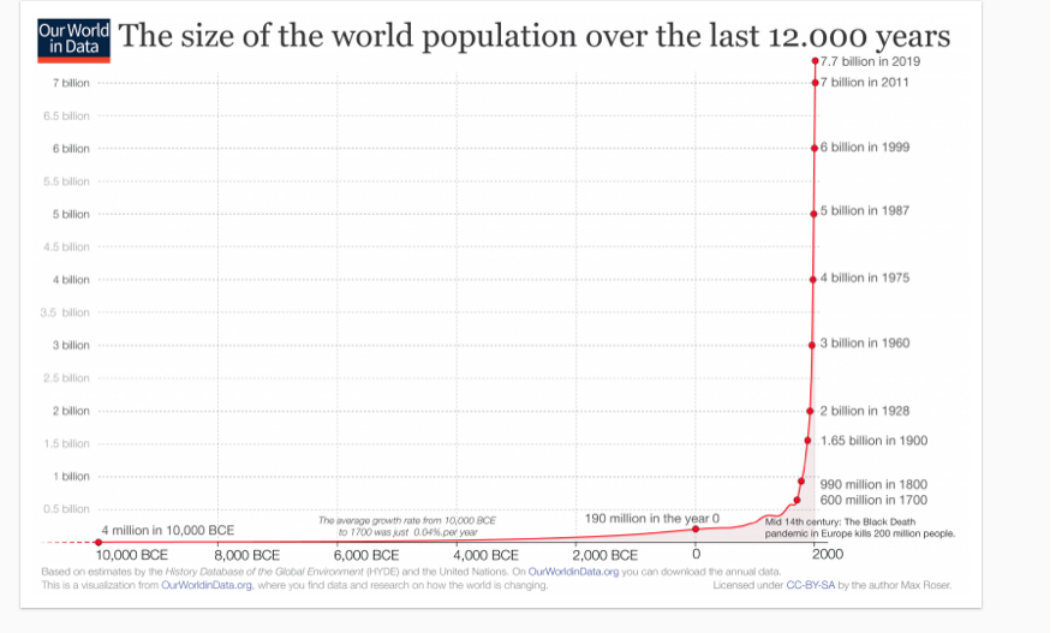
**Fait 2.1.1 PIB mondial au cours des deux derniers millénaires**

Ici l'évolution du PIB (production de richesse) mondial depuis l'année 1 AD.



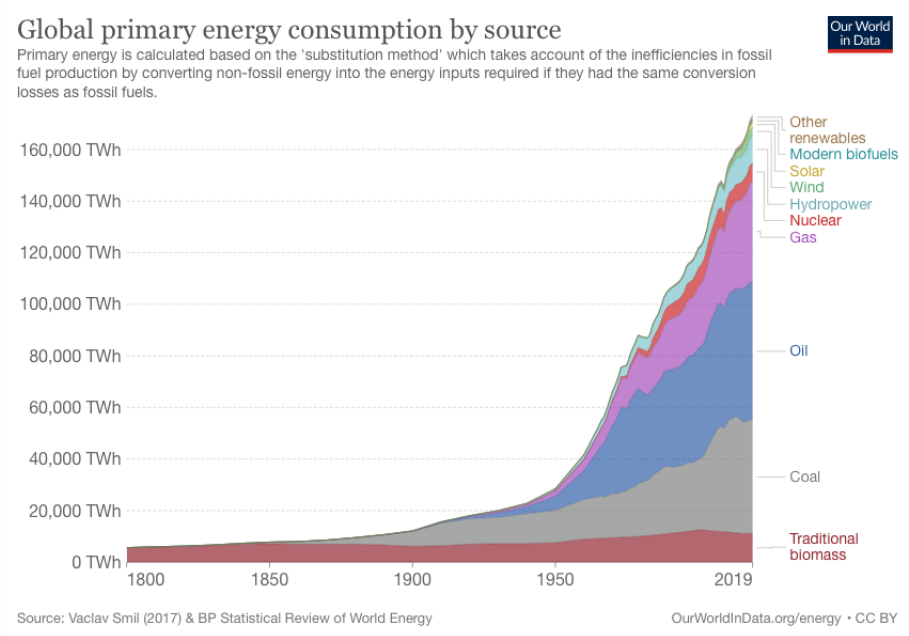

Depuis 1900, on constate une croissance moyenne d'environ $3\%$ par an.

**Fait 2.1.2 La croissance démographique depuis 12 000 ans**




**Fait 2.1.3 Consommation mondiale d'énergie primaire**

Ici la consommation mondiale d'énergie primaire, par source, depuis le début des années 1800.



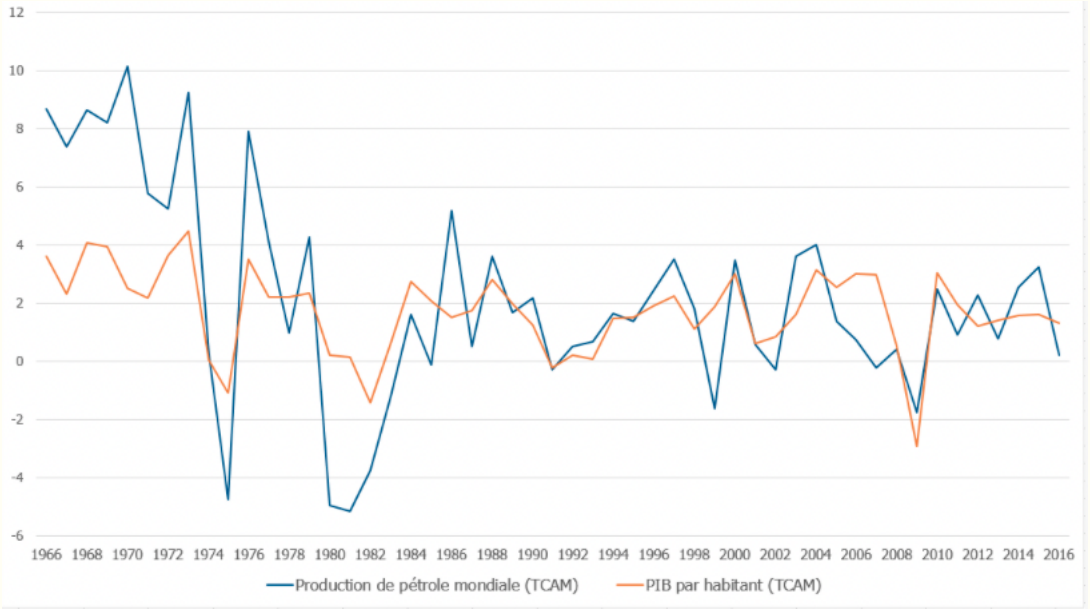

Non seulement nous constatons sa croissance fulgurante (entre $2\% - 3\%$ par an comme le PIB) mais aussi que la majorité (80%) est constituée de combustibles fossiles (pétrole, gaz et charbon).

On remarque également que l'explosion du PIB (Fait 2.1.1) et la croissance démographique (Fait 2.1.2) coïncident avec l'apparition des combustibles fossiles.

Le graphique montre aussi un fait très important dans la discussion actuelle sur la transition énergétique, notamment, qu'une transition énergétique d'une source à l'autre n'a jamais eu lieu. Ce qui se passe historiquement, c'est que à chaque fois qu'une nouvelle source d'énergie se développe, elle s'ajoute aux sources précédentes dans un effet cumulatif. Ainsi, la transition énergétique dont nous avons besoin aujourd'hui (substitution totale des $80\%$ des combustibles fossiles !) est un problème totalement inédit pour l'espèce humaine.

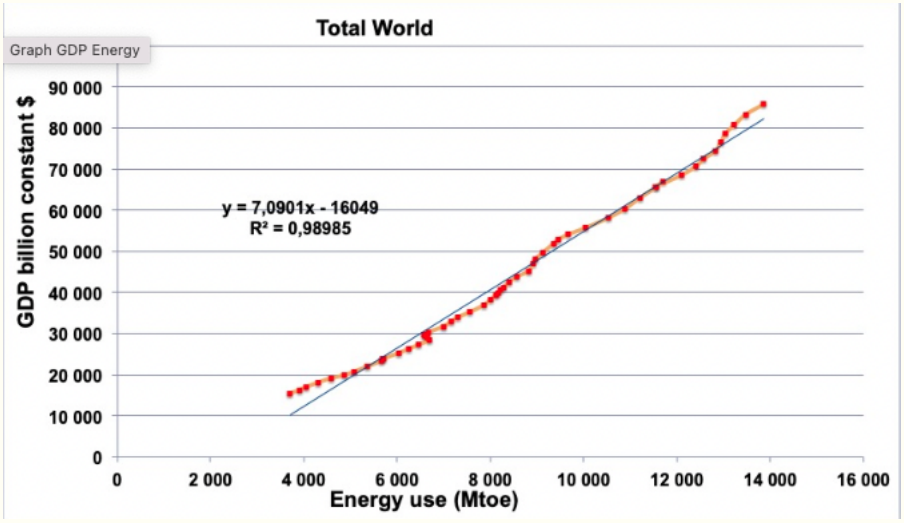
**Fait 2.1.4 Lien PIB-énergie**

"Il est facile de comprendre que notre économie entière repose en pratique sur la consommation d'énergie. En considérant que nous transformons des ressources en produits et en services, et que chaque transformation requiert l'utilisation d'énergie, il semble logique que la production économique soit liée à la quantité d'énergie ajoutée dans le système."




*En bleu : variation de la production physique de pétrole depuis 1966.*
*En orange : variation du PIB par personne en moyenne monale.*
*Sources : World Bank (PIB) et BP (production de pétrole)*

La corrélation existante ne lie pas la croissance économique au prix du pétrole, mais plutôt au volume de pétrole.




Pour plus d'information, voir l'article.

**Remarque 2.1.5**

Les graphiques dans Fait 2.1.4 montrent une tendance historique d'un lien entre la croissance de la consommation d'énergie et la croissance du PIB. Cependant, ils ne permettent pas de répondre à la question de savoir quel est le facteur déterminant.

**Fait 2.1.6**

Malheureusement, la combustion de combustibles fossiles a pour conséquence chimique la production de $CO_2$ :

$$\text{charbon : } C + O_2 \rightarrow CO_2 + \quad +32.8kJ/g \tag{2.1}$$

$$\text{gaz : } CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O + \quad 55.6kJ/g \tag{2.2}$$

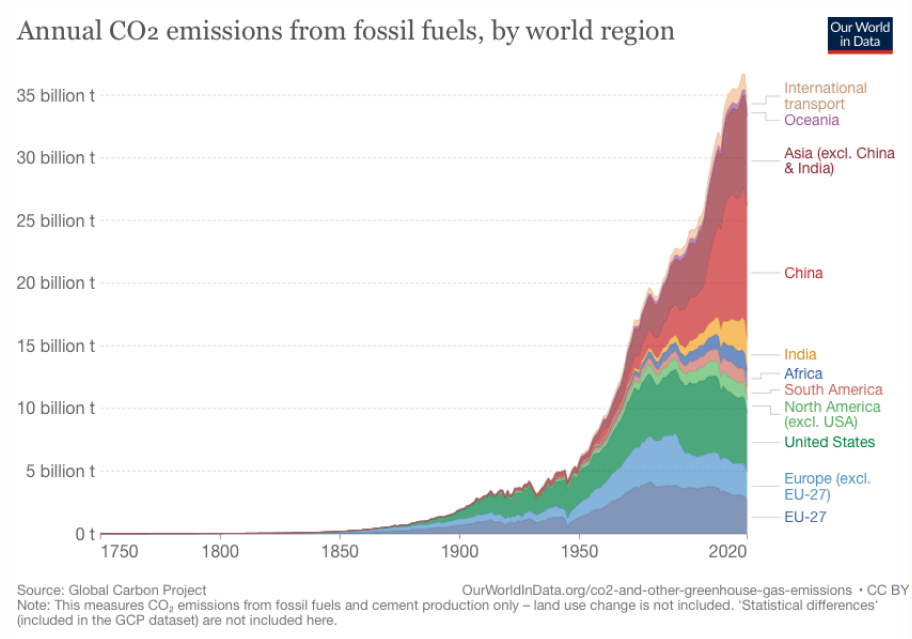
$$\text{pétrole : } C_8H_{18} + \frac{25}{2}O_2 \rightarrow 8CO_2 + 9H_20 + 48.0kJ/g \tag{2.3}$$

avec un facteur $3$ - chaque kilo de pétrole, de gaz ou de charbon consommé produit environ $3$ fois plus de $CO_2$.

On constate aussi que la combustion du charbon est celle dont le rendement énergétique est le plus faible, ce qui signifie que pour la même énergie, par rapport au gaz et au pétrole, nous devons brûler plus de charbon avec un résultat net de plus de $CO_2$.

Voici une conséquence du Fait 2.1.6 :

**Fait 2.1.7 Émissions annuelles de $CO_2$ provenant des combustibles fossiles, par région**




Les émissions de $CO_2$ ont augmenté au même rythme que la consommation d'énergie et la croissance du PIB au cours du XX siècle, environ $2\% - 3\%$ par an.

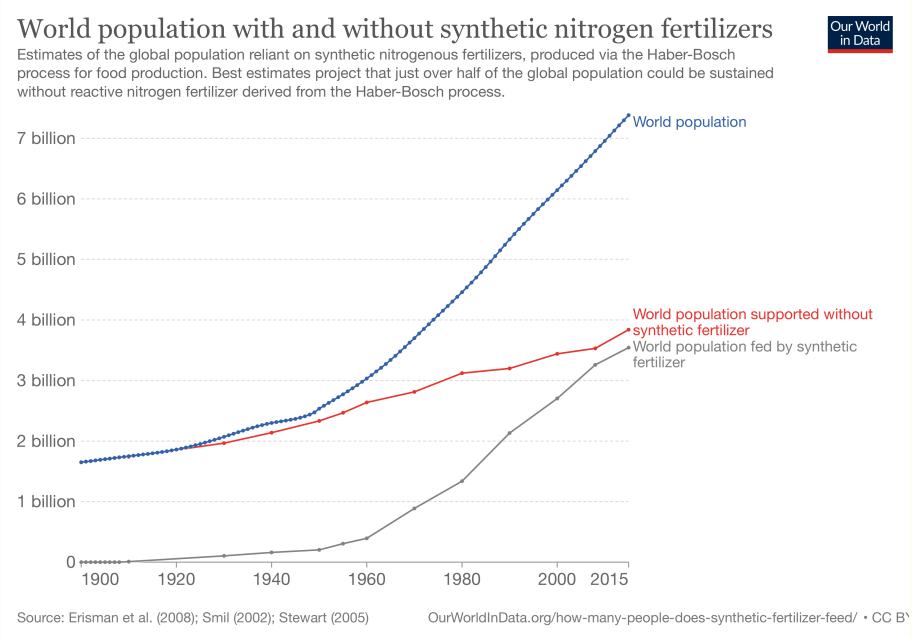
**Remarque 2.1.8**

Une tonne de $CO_2$ équivaut à :

- 1 an de chauffage au gaz pour un 3 pièces à Paris
- 1 aller-retour Paris-New York en avion
- 1,8 tonnes de papier
- 14.000 km de Twingo en ville
- 8.500 km de 4×4 en ville
- 20 aller-retours Paris- Londres en avion

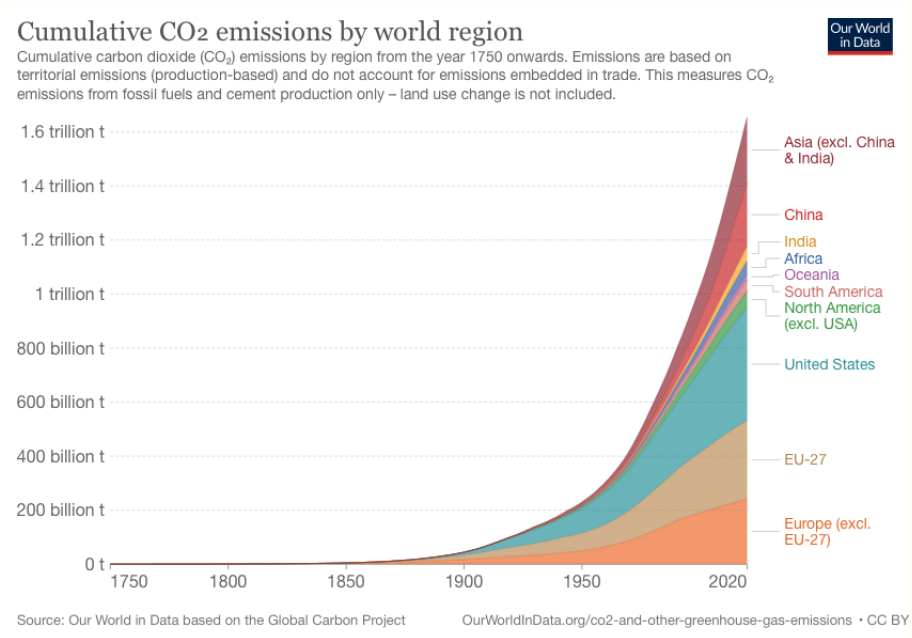
**Fait 2.1.9 (Procédé Haber-Bosh)**

Environ 1% des emissions dans lFait 2.1.7 proviennent de la fábrication de l'hidrogène (à partir de la combustion de gaz naturel ) pour le procédé Haber-Bosh. Cette réaction chimique est à la base de la synthèse de l'ammoniac $NH_3$ pour créer des engrais azotés synthétiques, essentiels pour alimenter la population mondiale. L'explosion spectaculaire des rendements agricoles et de la production alimentaire n'est possible que grâce à ce processus.




## Fait 2.1.10 Émissions cumulées de $CO_2$ par région depuis 1750 (déforestation non comprise)

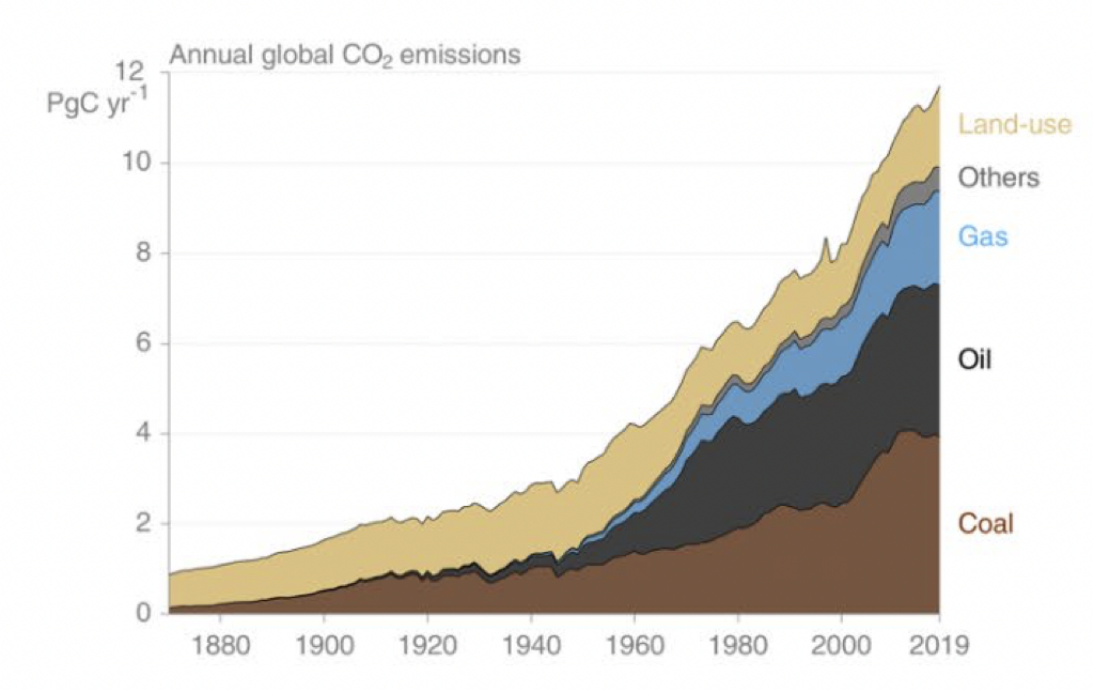
Toutes les régions du monde contribuent aux émissions, mais si on prend en compte les émissions cumulées depuis 1750 (l'intégrale !), l'Europe et les États-Unis sont les régions qui ont de loin le plus contribué.



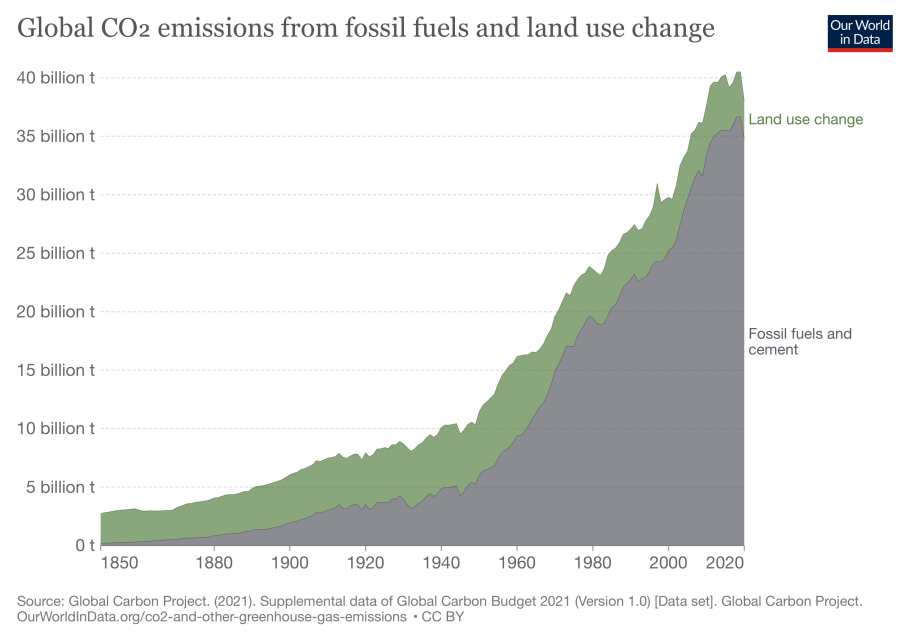

Cela explique en partie pourquoi il est si compliqué pour les pays européens et les États-Unis de demander à des pays comme la Chine et l'Inde de réduire leurs émissions : même si l'Europe et les États-Unis émettent beaucoup moins aujourd'hui que par le passé, leur contribution nette reste très supérieure.

**Fait 2.1.11 Autres émissions de $CO_2$**

La combustion de combustibles fossiles n'est pas la seule l'activité humaine qui cause l'augmentation de la concentration de $CO_2$ dans l'atmosphere. La déforestation est également un facteur important. La production de ciment aussi.

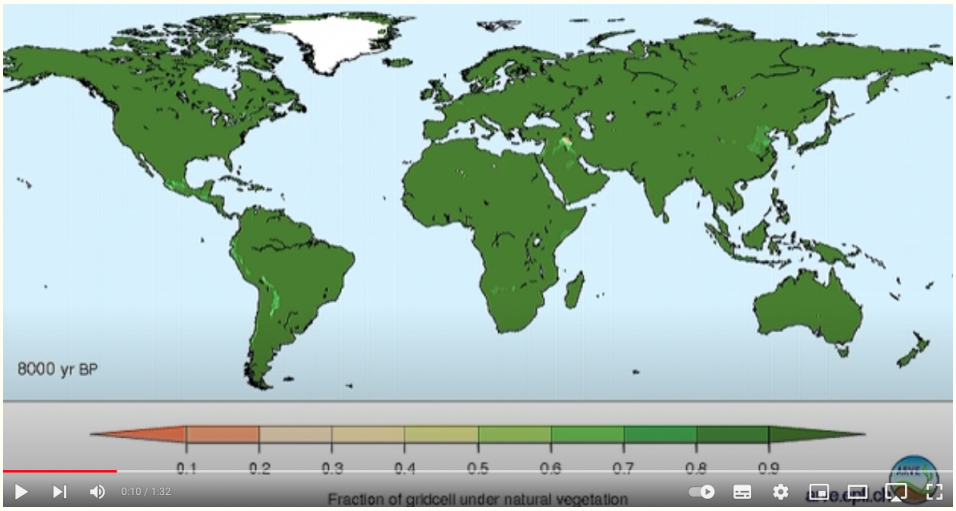



Lien Figure 5.5



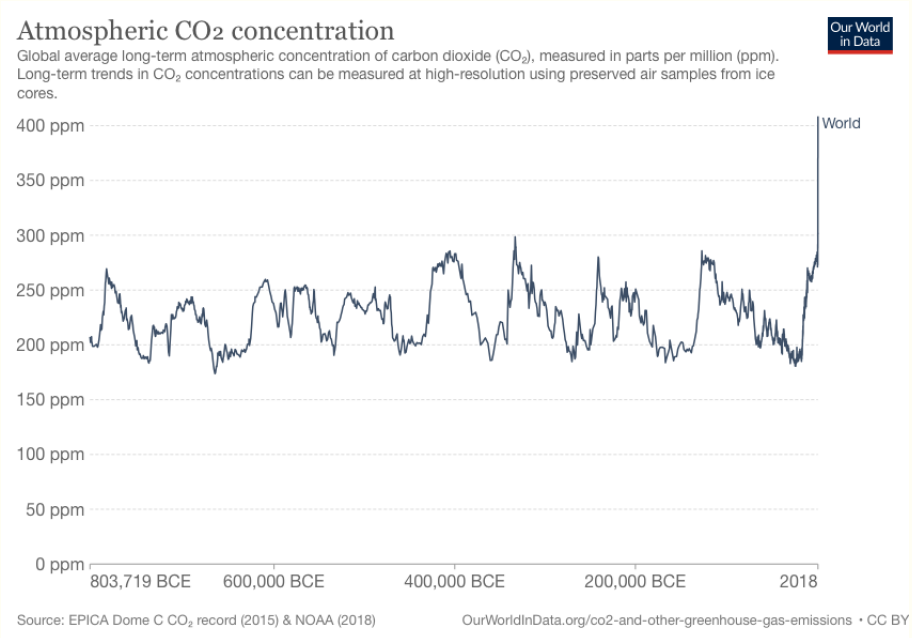
**Fait 2.1.12**

Vidéo avec le changement d'occupation des sols à l'échelle mondiale depuis 8000.




**Fait 2.1.13 La concentration de $CO_2$ dans l'atmosphère**

Tous les effets additionnés, voici le résultat global :

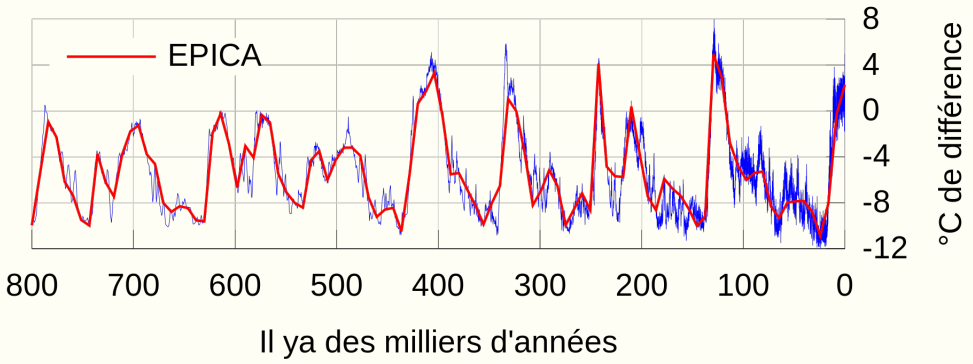



Il faut aussi préciser qu' une fois ajouté à l'atmosphère, le $CO_2$ y reste pendant longtemps, entre 300 et 1 000 ans.

La hausse de concentration de $CO_2$ (mais non seulement - voir Fait 2.1.17 en bas ) empêche le rayonnement infrarouge de s'échapper vers l'espace - l'effet de serre.

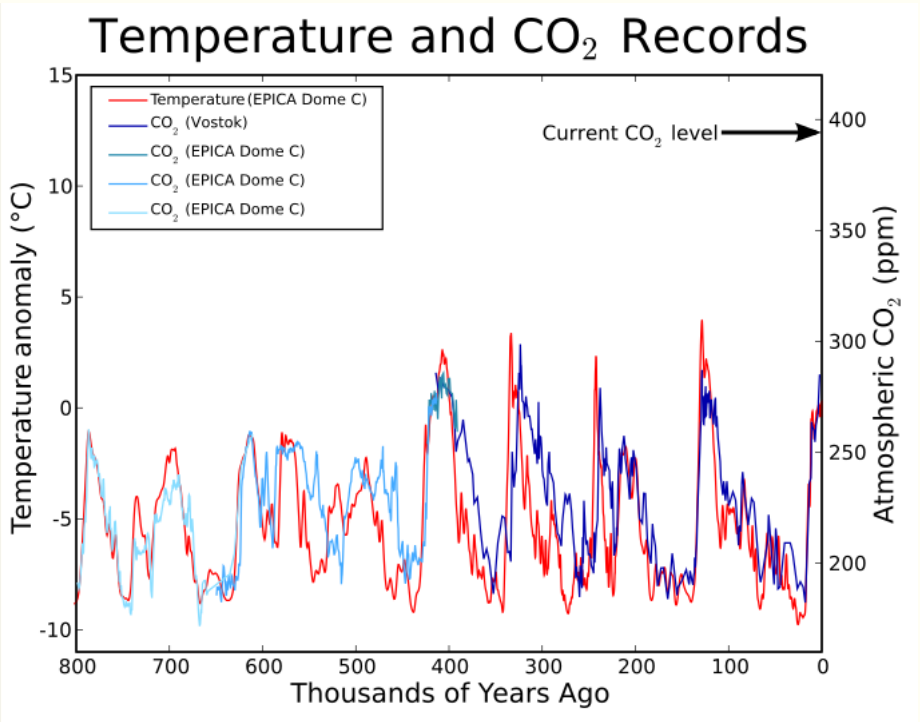
Le résultat net de cette quantité supplémentaire d'énergie c'est un réchauffement accru de l'atmosphere. Ce phénomène a été découvert par Joseph Fourier, en 1824. Nous reviendrons en détail dans la Section 4.5. Voici quelques données brutes qui en témoignent :

**Fait 2.1.14 Projet EPICA - Évolution de températures pour les 800 000 dernières années en Antarctique**




**Fait 2.1.15 Projet EPICA - Évolution de la température et La concentration de $CO_2$.**

Le plus remarquable n'est pas l'augmentation de la température, mais la vitesse de cette augmentation.




Source pour l'image.

**Fait 2.1.16 Évolution de la température en surface**

L'influence humaine a réchauffé le climat à un rythme qui est sans précédent au cours des 2000 dernières années au moins. Depuis la révolution industrielle, les températures ont déjà augmenté de 1,2 degrés Celsius :

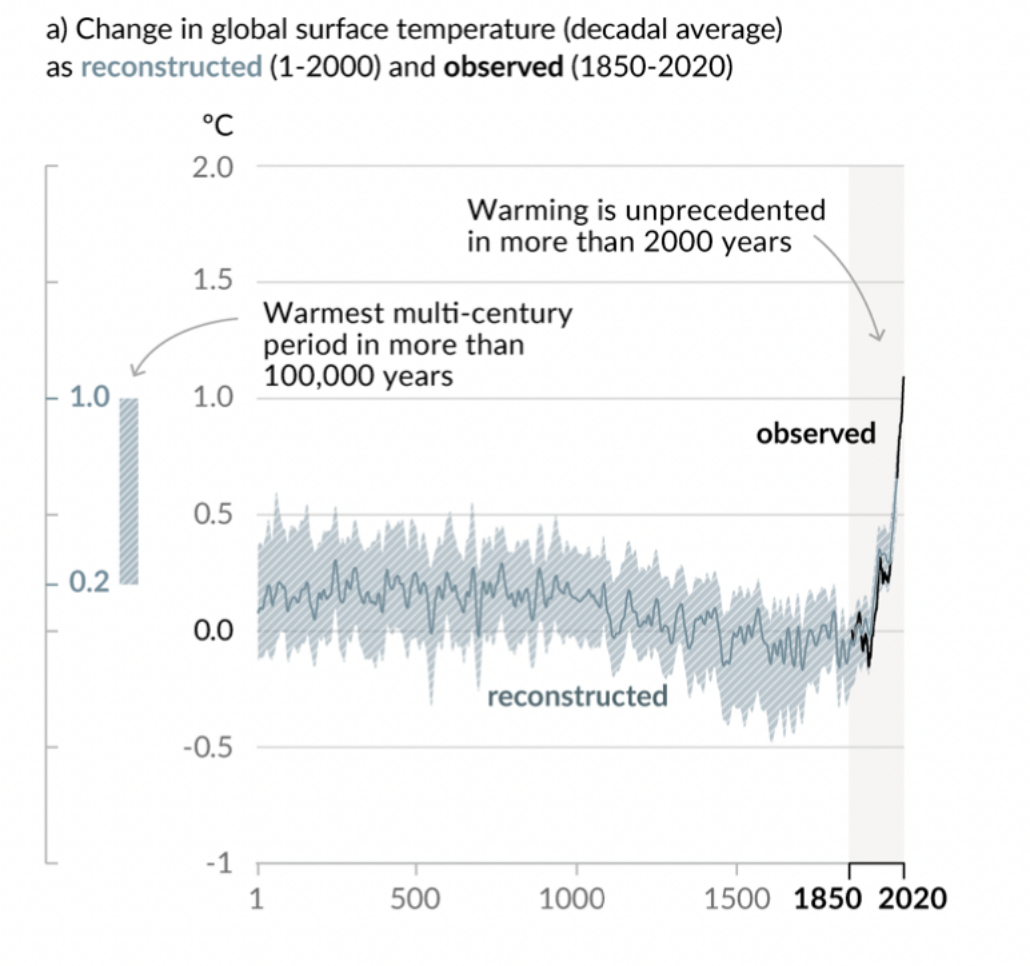
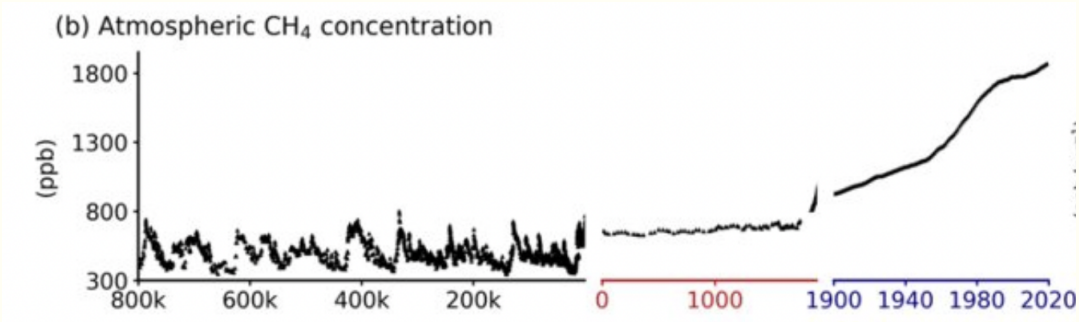



Figure SPM.1

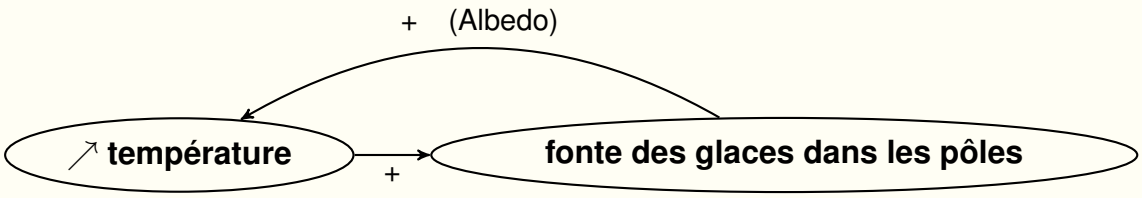
**Fait 2.1.17**

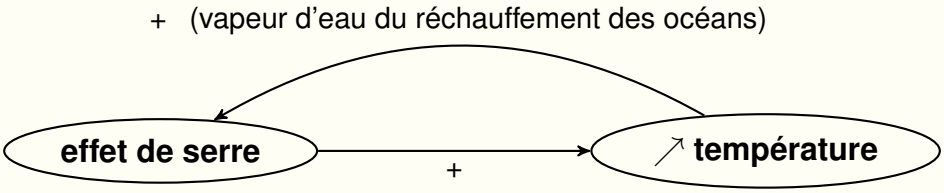
Le $CO_2$ n'est pas le seul responsable de l'effet de serre. Le méthane ($CH_4$) et la vapeur d'eau sont tout aussi importants. Les émissions mondiales de méthane ont augmenté depuis 1750, contribuant à environ $0,6°C$ du réchauffement actuel de $1,2°C$. Elles proviennent des énergies fossiles, de l'élevage, des déchets et de la riziculture (voir Figure 5.14)




**Fait 2.1.18**

La hausse des températures peut déclencher certaines *boucles de rétroaction positive* qui vont accélérer le processus dans un cycle de dégradation sans fin :

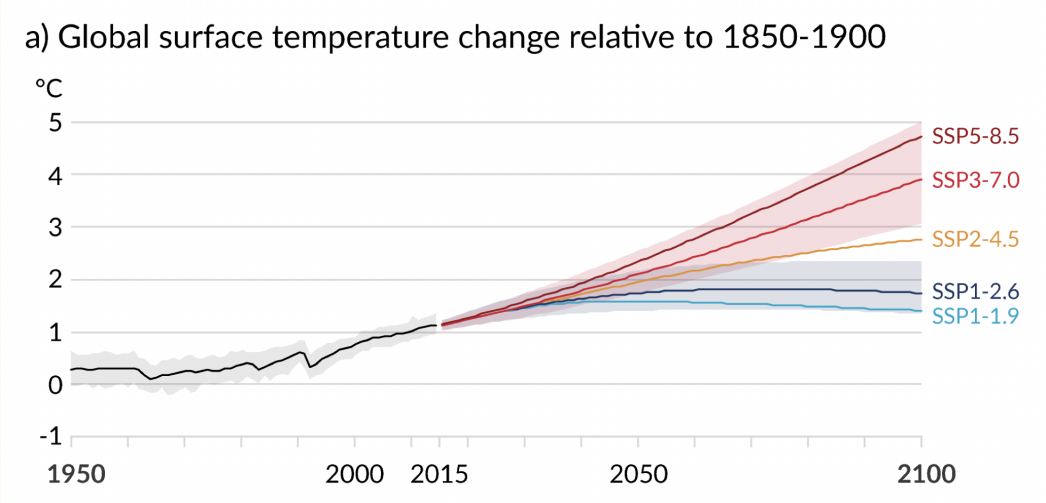


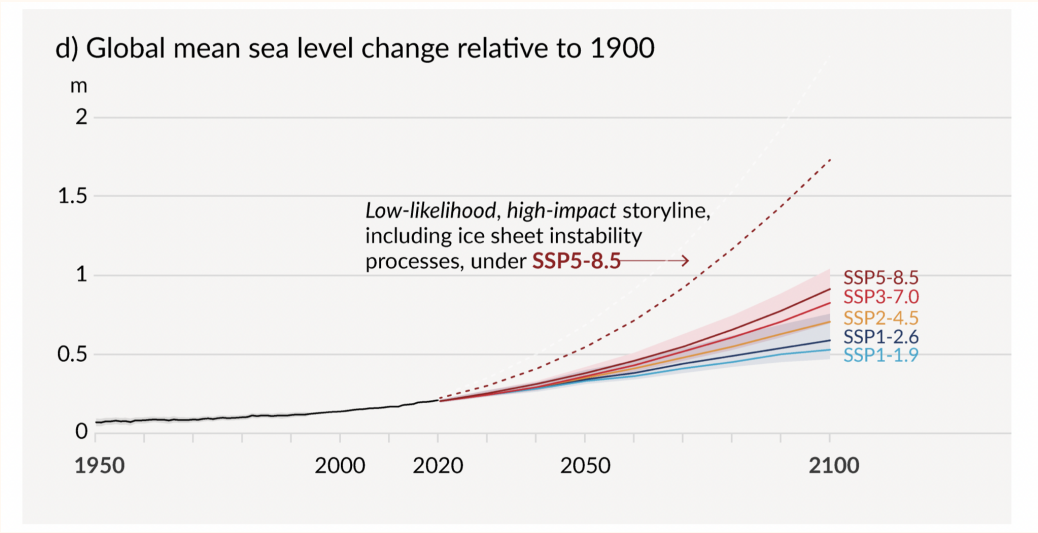

**Scénario 2.1.19**

Dans ses rapports, le GIEC présente des différents scénarios de ce qui pourrait arriver si nous ne stoppons pas radicalement les émissions de gaz è effet de serre à partir d'aujourd'hui :

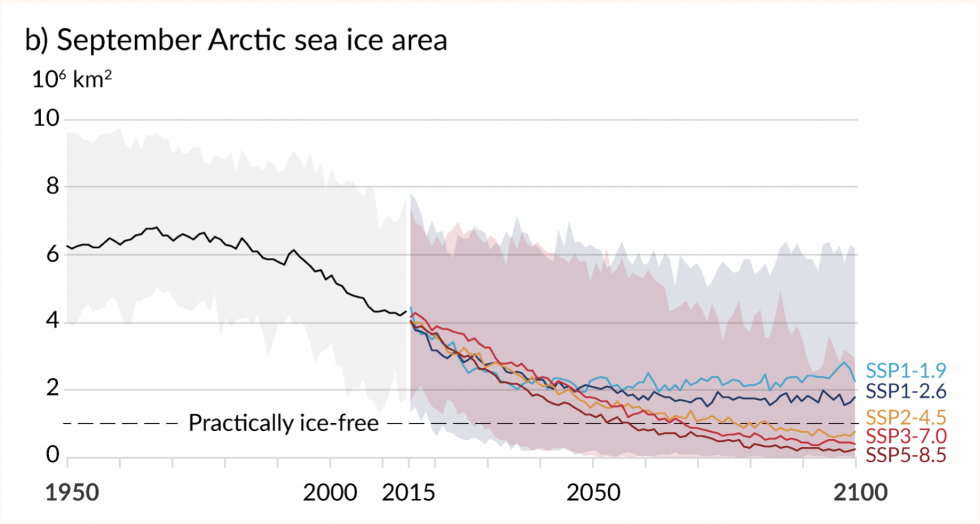
— Augmentation de la température en surface :




— Augmentation du niveau de la mer :

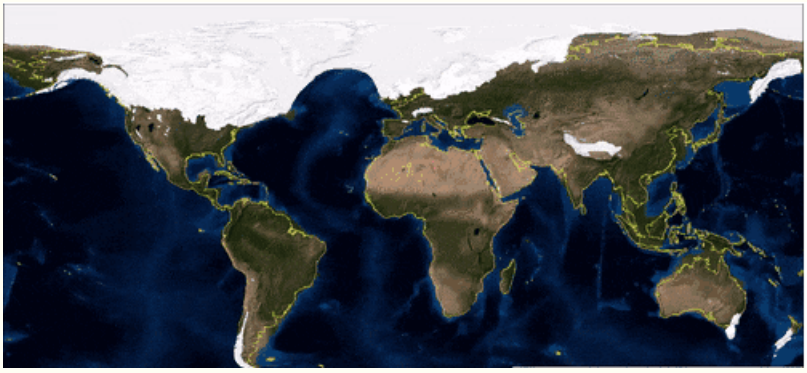



— Disparition des calottes glaciaires dans les pôles

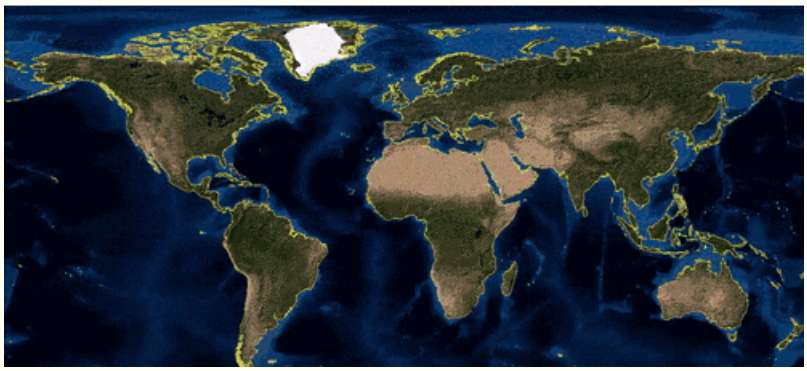



**Fait 2.1.20**

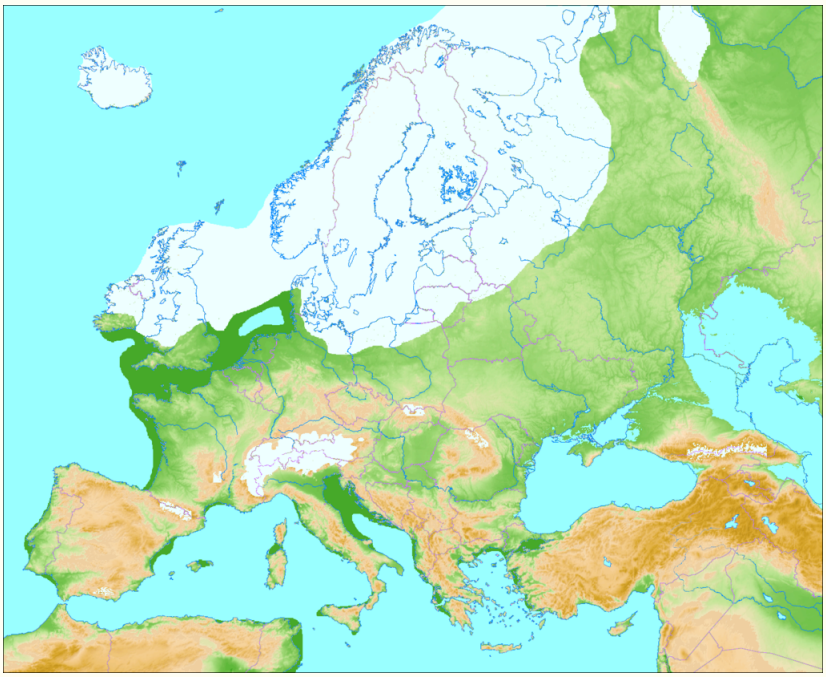
Quatre degrés de plus ou quatre degrés de moins ce n'est pas négligeable. Voici une photo de la Terre avec 4 degrés de moins pendant la dernière ère glaciaire.



et la Terre aujourd'hui :



Voici l'Europe avec quatre degrés de moins. La couverture de glace a une épaisseur de 3 km.



Aujourd'hui on parle donc d'une augmentation de même ampleur qu'une déglaciation, mais 100 fois plus vite.

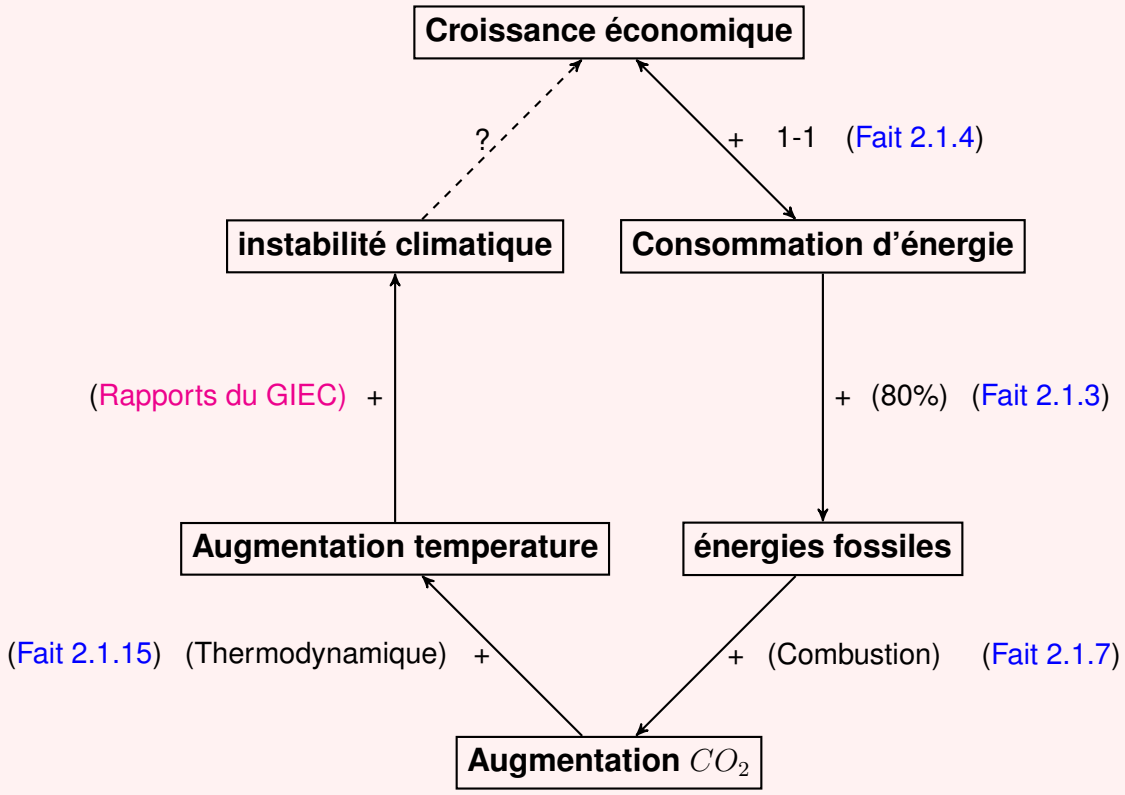
**Remarque 2.1.21**

L'accord de Paris vise à limiter le réchauffement climatique à un maximum de 2 degrés. En termes physiques, cela signifie que nous devons réduire nos émissions de 5% par an. Pour avoir une idée, cela n'a été réalisé que trois fois dans l'histoire : la crise de 1932, pendant la Seconde Guerre mondiale, et maintenant avec la crise Covid. Nous allons donc avoir besoin de l'équivalent d'une crise covid par an pour respecter l'accord.

## 2.2. Une vision systémique.

**Problème 2.2.1**

L'ensemble de ces données semble établir une tendance historique entre la croissance économique mondiale et l'augmentation de la température.




Chaque lien pose un problème :

— Problème de découplage globale : La croissance économique à niveau globale peut-elle se poursuivre indéfiniment en étant toujours liée à une

augmentation de la consommation d'énergie ? La croissance économique à niveau globale est-elle possible sans une augmentation globale de la consommation d'énergie ? Voir la Section 4.6 et l'Exemple 5.2.6.

— Problème de transition : Est-il possible de substituer les $80\%$ de combustibles fossiles par d'autres sources sans déclencher l'effondrement économique ? Disposons-nous encore de l'énergie et des marges de $CO_2$ nécessaires pour fabriquer cette transition ? Voir Problème 2.2.4, Fait 2.2.5 et l'Exemple 3.8.3.

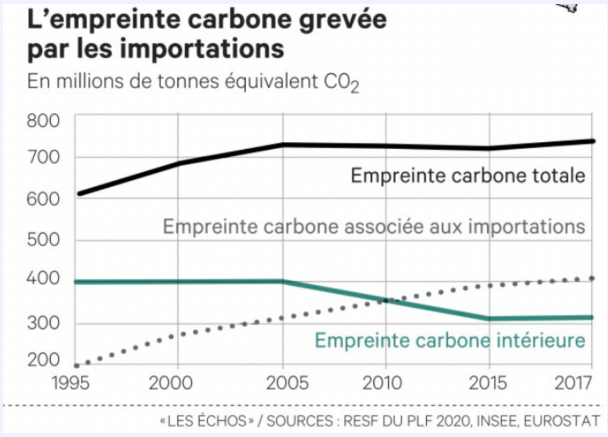
— Pouvons-nous trouver et utiliser massivement des technologies de capture du carbone ? Peut-on taxer les émissions de carbone sans compromettre la croissance économique ?

— Problèmes de résilience et d'adaptation - pouvons-nous adapter nos vies et préparer notre société à un monde plus chaud ? Voir le Problème 2.2.4.

— L'échelle de temps : combien de temps nous avons avant de perdre la possibilité d'agir sur le système ? Quelles sont les conséquences de chaque seconde de inaction ? Voir Exemple 5.3.1.

**Remarque 2.2.2**

Le découplage de la croissance économique et de l'énergie ou des émissions de $CO_2$ doit être global. Un découplage local doit être interprété avec beaucoup de prudence puisque, comme dans le cas français, cela peut simplement signifier que les émissions sont délocalisées du territoire français mais cachées sous forme d'importations en provenance d'autres pays.



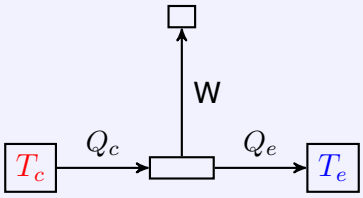
**Remarque 2.2.3**

Il n'y a ni réponses absolues ni solutions miracles aux questions posées dans le Problème 2.2.1. Très souvent on assiste à des tentatives de réfuter un débat sérieux du Problème 2.2.1 en faisant appel aux nouvelles technologies et à une meilleure efficacité énergétique comme solutions miraculeuses. Ce sont sûrement des ingrédients importants et il faut les intégrer, mais il faut aussi prendre en compte que la technologie et l'efficacité ont suivi aussi une tendance de performance historique au cours du XX siècle. Ce n'est pas pour autant que la consommation d'énergie et les émissions ont diminué. Bien au contraire.

D'une autre part, comme l'a découvert Sadi Carnot, la physique elle-même nous impose via les principes de la thermodynamique, des limites à la performance :

"*L'on a souvent agité la question de savoir si la puissance motrice de la chaleur est limitée, ou si elle est sans bornes ; si les perfectionnements possibles des machines à feu ont un terme assignable, terme que la nature des choses empêche de dépasser par quelque moyen que ce soit, ou si au contraire ces perfectionnements sont susceptibles d'une extension indéfinie.*" Carnot, 1824

Prenons l'exemple d'une centrale thermique, ou d'un moteur à combustion d'une voiture. Les deux fonctionnent selon le même principe : il y a une source de chaleur à une certaine température $T_c$ ( par exemple, de l'eau chaude dans le cas de la centrale, ou la combustion de l'essence dans le cas d'une voiture). La source chaude va fournir une certaine quantité d'énergie sous forme de chaleur $Q_c$. Une partie de cette énergie $W$ sera transformée en travail mécanique (dans l'exemple de la centrale, la vapeur d'eau évaporée fera tourner des turbines, dans le cas de la voiture, les pistons), le reste de l'énergie - $Q_e$ - sera perdu dans l'environnement à une certaine température $T_e$.




Le premier principe de la thermodynamique (la loi de conservation de l'énergie) implique que

$$Q_c = W + Q_e$$

Le rendement $\epsilon$ est donc défini comme

$$\epsilon = \frac{W}{Q_c}$$

Si $\epsilon = 1$ alors il n'y a pas de pertes d'énergie vers l'environnement. Le deuxième principe de la thermodynamique nous dit que dans le meilleur des cas, on a une situation de proportionnalité :

$$\frac{Q_c}{T_c} = \frac{Q_e}{T_e}$$

Donc

$$\epsilon = \frac{Q_c - Q_e}{Q_c} = \frac{(Q_c - \frac{T_e}{T_c}Q_c)}{Q_c} = 1 - \frac{T_e}{T_c}$$

Donc, le rendement physique maximal autorisé ne dépend que de la température de la source chaude et du réservoir froid.

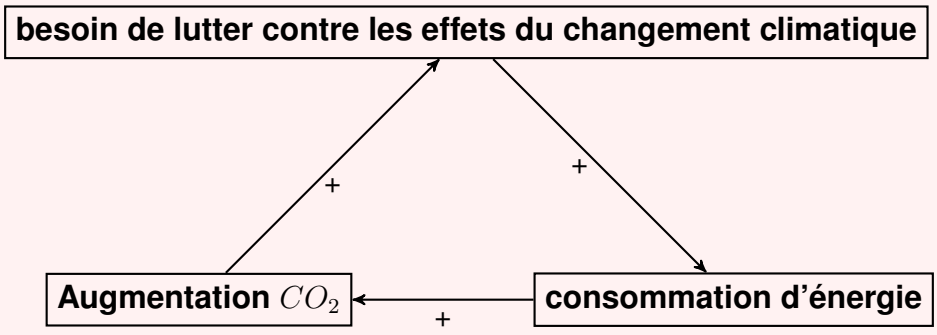
— La centrale thermique fonctionne entre la température $T_c = 600°C = 873K$ et $T_e = 15°C = 288K$ pour un rendement théorique maximal de $\epsilon = 1 - \frac{373}{288} = 0.67$ , donc $67\%$.

— Pour une voiture, comme la température de combustion de l'essence est d'environ 550 K, on aura un rendement de $\epsilon = 0.47$, donc $47\%$.

En réalité, des vraies centrales thermiques et des vraies voitures n'atteignent que la moitié de l'efficacité théorique maximale, soit environ $30\%$ pour la centrale et $25\%$ pour les voitures.

**Problème 2.2.4**

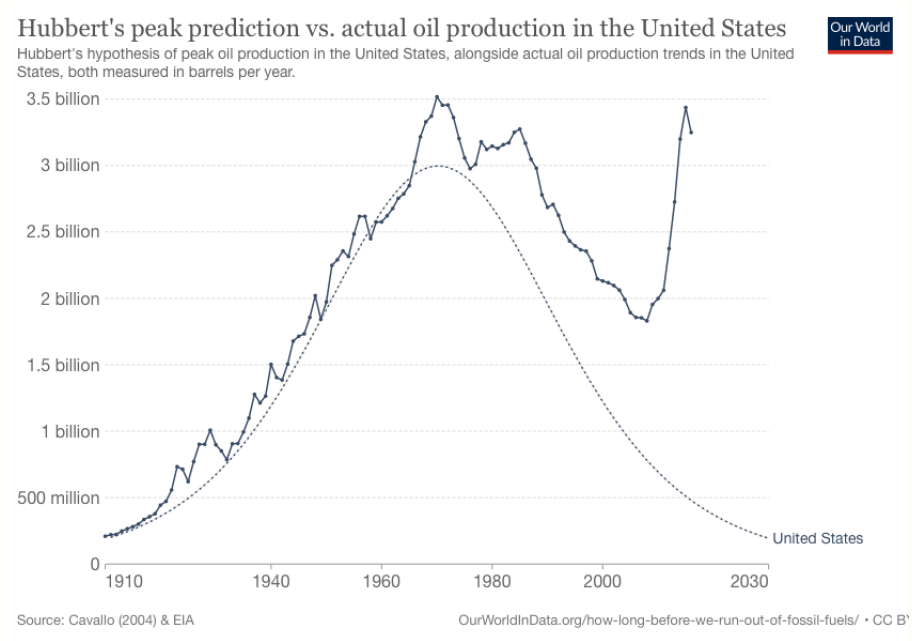
Dans un monde où le climat change, nous devrons consacrer une quantité croissante de ressources énergétiques pour lutter et nous adapter à ces changements, complétant ainsi une autre boucle de rétroaction

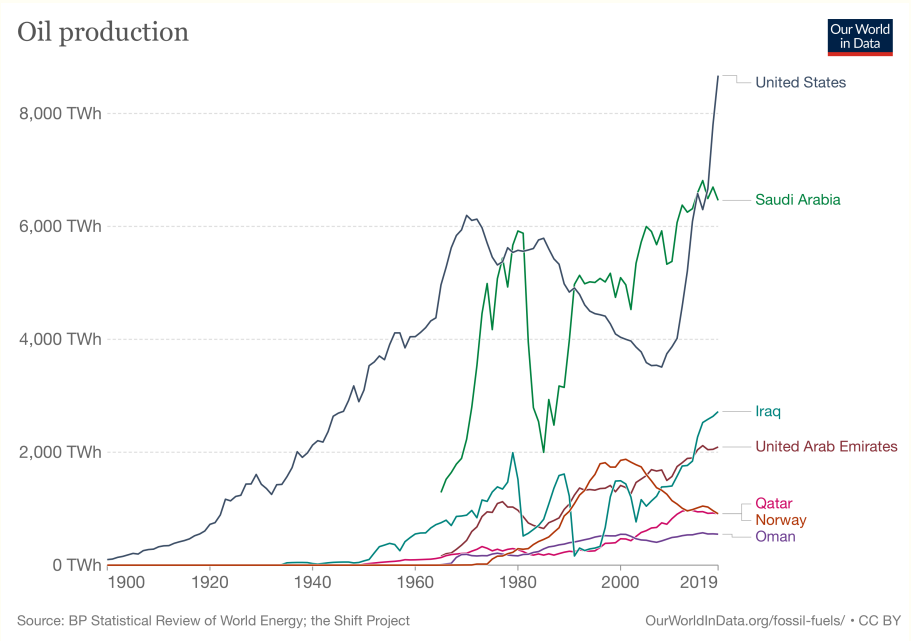



**Fait 2.2.5**

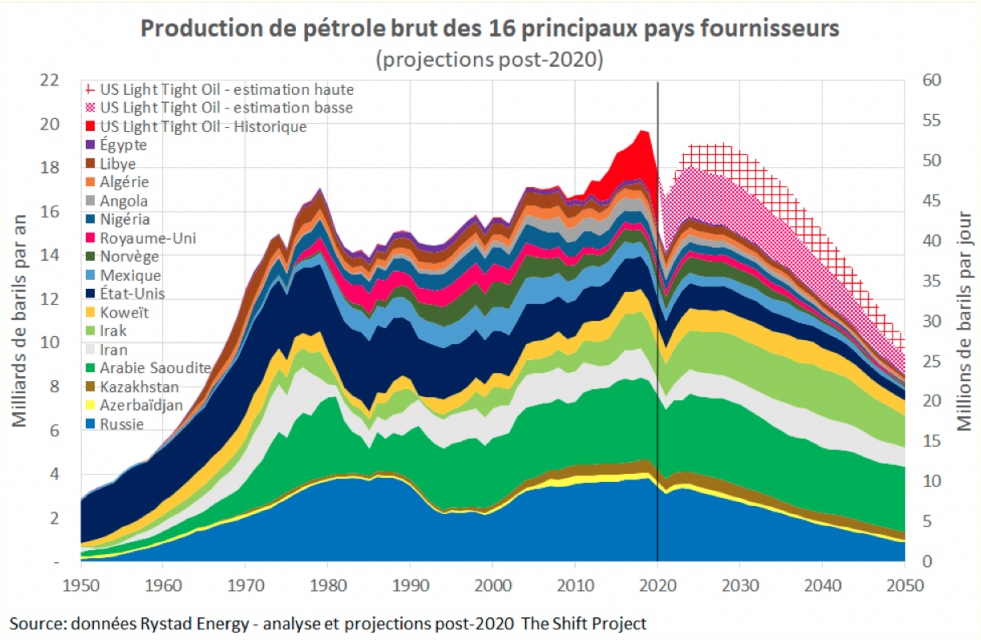
Même si le changement climatique ne nous pousse pas à abandonner les combustibles fossiles, l'épuisement des réserves risque de le faire. Dans les années 50, Hubbert avait prédit le pic de la production américaine de pétrole conventionnel, qui s'est produit une dizaine d'années plus tard. Ce n'est que grâce au pétrole non conventionnel que plus récemment, notamment après la

crise financière de 2009, les États-Unis ont réussi à relancer leur production :




Au niveau mondial un pic de pétrole conventionnel à déjà été dépassé en 2008 . La rythme auquel nous trouvons de nouveaux puits suggère que c'était effectivement le maximum (voir l'Exemple 3.8.3).




Voir l'article. Ce déclin risque de rendre l'énergie moins abondante. Nous ne pouvons pas ignorer qu'une transition énergétique des combustibles fossiles vers une autre source d'énergie nécessitera elle-même d'un apport d'énergétique (construction d'éoliennes, extraction de minéraux pour électrifier le réseau et construire des batteries, etc). Ce risque doit être intégré dans tout plan de transition.

**Paradigme 2.2.6**

Voici notre paradigme :

— La consommation massive énergie des combustibles fossiles a créé un problème.

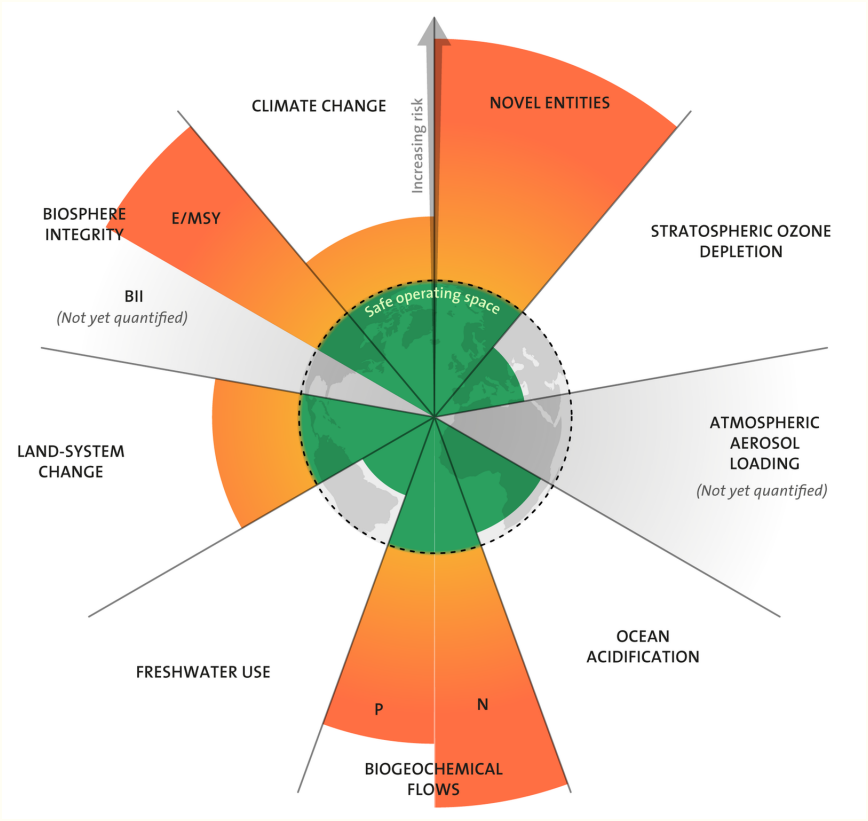
— Toute solution technologique à ce problème nécessite d'un apport initial d'énergie.

— Les combustibles fossiles sont de moins bon marché mais la mise en place de toutes les sources d'énergie alternatives nécessite des combustibles fossiles.

Il y a des arguments d'analyse mathématique qui peuvent nous aider à fixer des limites et à nous guider vers des solutions réalistes. C'est ce que nous allons essayer d'expliquer dans les prochains chapitres.

**Fait 2.2.7**

Le réchauffement climatique n'est pas le seul problème systémique auquel nous sommes confrontés. Le *système Terre* est constitué de différents composants inter-connectés, qui s'influencent mutuellement. Nous avons déjà atteint un niveau critique pour plusieurs d'entre eux et courons le risque d'aller au-delà du point de rupture.

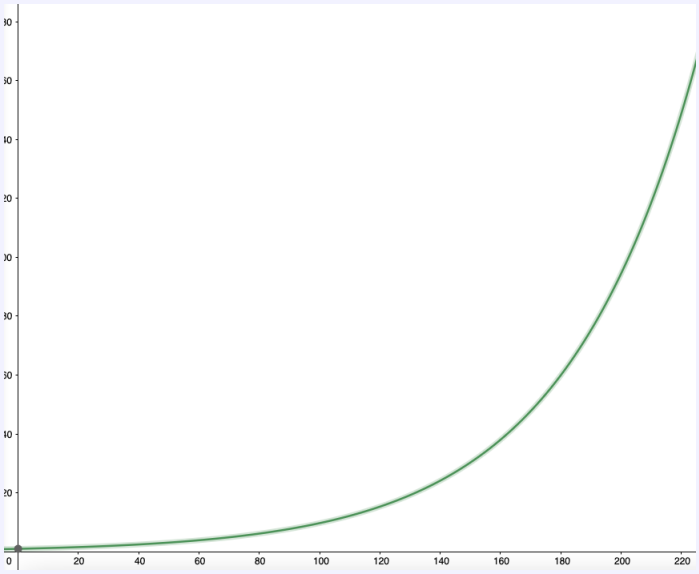



Cliquez.

## 2.3. L'objectif du cours

**Remarque 2.3.1**

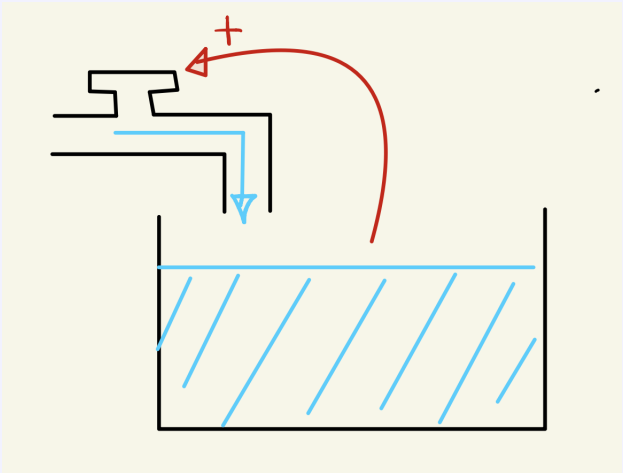
Les courbes des Faits 2.1.1 à 2.1.3, 2.1.7 et 2.1.11, ont toutes la même forme :




L'objectif principal de ce cours est d'expliquer que tous ces exemples sont des exemples de croissance exponentielle.

**Remarque 2.3.2**

Nous avons également vu dans les Fait 2.1.18 et Problèmes 2.2.1 et 2.2.4 qu'une partie du problème climatique c'est l'existence de boucles de rétroaction positive :




Voici le résultat principal que nous allons montrer dans ce cours :

**Théorème 2.3.3 Résultat principal du cours**

Toute boucle de rétroaction positive entraîne une croissance exponentielle, et inversement, toute croissance exponentielle résulte d'une boucle de rétroaction positive.

3

# Analyse de fonctions

## 3.1. Introduction

Les fonctions que nous allons étudier sont des fonctions à valeurs réelles. Voici quelques exemples :

**Exemple 3.1.1**

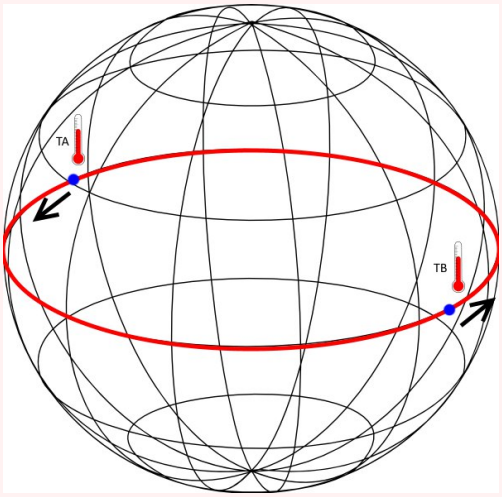
- La consommation d'énergie en fonction du temps au fil des années ;
- L'augmentation de température en fonction de la concentration de $CO_2$ ;
- l'évolution d'une population en fonction de l'accès à des ressources vitales ;
- L'évolution des prix de l'énergie en fonction de la difficulté d'accès à la source d'énergie.
- L'évolution d'un phénomène avec des boucles de rétroaction.
- La température en fonction de la région.
- etc.

Pour expliquer la croissance exponentielle (voir Théorème 2.3.3) , nous aurons besoin de nombreux résultats préliminaires. Nous devons donc commencer par des étapes et des raisonnements mathématiques plus simples. C'est l'objectif de ce chapitre. La preuve du Théorème 2.3.3 sera donnée dans le Chapitre 4.

Illustrons à l'aide d'un exemple le type de raisonnement mathématique que l'on doit être capable de maîtriser :

**Théorème 3.1.2 Borsuk-Ulam**

Il y a toujours deux points opposés sur la ligne de l'équateur qui ont la même température.




Voici une autre version du même problème :

**Exemple 3.1.3**

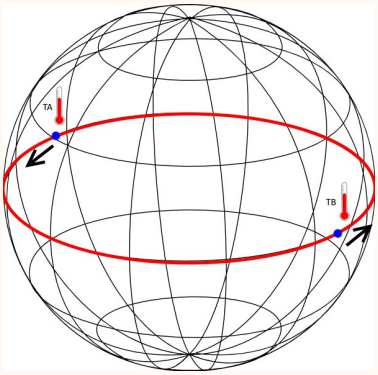
Quand j'avais 4 ans, je faisais $1$ mètre. À 15 ans, 1.6 mètres. Donc, à un moment donné, entre 4 ans et 15 ans, je faisais 1.3 mètres.

**Context 3.1.4**

Dans les deux cas, nous avons le même mécanisme sous-jacent :

— le domaine de définition du problème. Pour l'enoncé Théorème 3.1.2 il s'agit de l'équateur. Pour lExemple 3.1.3, l'intervalle d'ages 4-15 ans. Dans les deux cas, le domaine de définition n'a aucune interruption.

— Une fonction qui attribue à chaque élément du domaine de définition, un nombre. Pour l'Théorème 3.1.2, à chaque point de l'équateur on associe la différence de températures entre ce point et son opposé.




$$\overset{\rightsquigarrow}{T(\theta+180°)-T(\theta)} \quad \mathbb{R}$$

Pour lExemple 3.1.3, à chaque age dans l'intervalle d'ages 4-15 ans, on associe la hauteur.

$$[4,15] \underset{\text{hauteur}}{\rightsquigarrow} \mathbb{R}$$

— Finalement, la logique sous-jacente est la suivante :

"Comme il n' y pas d'interruptions dans le domaine de définition, et comme les fonctions "différence de températures" et "hauteur" sont continues, il ne peut pas y avoir d'interruptions dans l'ensemble des valeurs obtenues."

Ce résultat n'est pas évident. Il nécessite deux ingrédients :

— le premier est une propriété fondamentale des nombres réels - à savoir, qu'il n'y a pas d'interruption entre deux nombres réels. Concrètement, cela veut dire la chose suivante. Prenez deux nombres quelconques, $x$ et $y$, différents avec $x < y$. Alors, il existe toujours un nombre $z$ strictement compris entre eux : $x < z < y$.

— le deuxième c'est la notion de fonction continue qui garantit que s'il n'y a pas d'interruptions dans le domaine, il n'y aura pas d'interruptions dans l'ensemble des valeurs obtenues.

Nous allons donner une démonstration du Théorème 3.1.2 dans la Preuve 3.4.26 en bas.

## 3.2. Connexité des nombres réelles

Donc, on ne peut éviter une discussion à propos du type de données à analyser : des nombres réels. Dans ce document, nous avons déjà considéré les nombres naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

des nombres entiers

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

des rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}\}$ et maintenant des nombres réels $\mathbb{R}$ :

**Quizz 3.2.1**

Prenons une feuille de papier format A4. Quand on plie la feuille en deux, le grand côté est réduit de moitié et on obtient une feuille A5.

1. Déterminer le ratio $r$ entre le grand côté et petit côte de la feuille A4.
2. Montrer que $r$ n'est pas un nombre rationnel.

**Exemple 3.2.2**

Par exemple, dans l'Quizz 3.2.1 nous avons vu apparaître naturellement le nombre $\sqrt{2}$ comme solution de l'équation $x^2 = 2$. Nous avons montré qu'il n'est pas rationnel.

Comment le calculer ? Extraire la racine carré de $2$ c'est trouver un carré dont l'aire est $2$. En prenant un rectangle de côté arbitraire $l_0$ et de même aire 2, il est nécessaire que la longueur de l'autre côté soit $\frac{2}{l_0}$ . Mais ce rectangle n'est pas carré. Pour le rendre "plus carré", il suffit de prendre un rectangle dont la longueur $l_1$ est la moyenne arithmétique des deux côtés précédents soit

$$l_1 = \frac{l_0 + \frac{2}{l_0}}{2}$$

et la longueur de l'autre côté est $\frac{2}{l_1}$ et donc l'aire reste 2. En itinérante indéfiniment le processus, on transforme petit à petit le rectangle en carré de même aire.

On peut donc appliquer l'algorithme pour un rectangle de longueur $l_0 = 2$. On obtient une suite de nombres rationnels

$$2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{17}{2}, \quad \frac{577}{406}, \quad \frac{665857}{470832}, \quad ...$$

où chaque nombre rationnel successif est plus proche de $\sqrt{2}$. En particulier, l'expansion décimale de $\sqrt{2}$ est infinie :

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420969807856967187 0...$$

**Quizz 3.2.3**

Un autre exemple important (notamment dans le Chapitre 4) est la racine carrée de $10$

$$\sqrt{10} = 3.16227766016837933199889354443271853371955513932521682685 7...$$

Cependant, une définition précise de $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{10}$ ne doit pas dépendre du choix d'une approximation particulière. Ce principe a mené Dedekind à une idée très belle : pour éviter de choisir une approximation particulière, nous *définissons* le nombre réel $\sqrt{2}$ comme un ensemble, à savoir l'ensemble de toutes les approximations de $\sqrt{2}$ par des nombres rationnelles strictement inférieures. Dedekind appelle ça une *coupure*.

**Exemple 3.2.4**

L'idée de Dedekind implique par exemple, que par construction le nombre réel $0.999999(..)$ est exactement égale à $1$. En effet, dans la logique de Dedekind il faut comparer deux sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ : c'est évident que n'importe quel rationnel plus petit que $0.999999(..)$ est aussi plus petit que $1$. Supposons maintenant qu'on a $\frac{a}{b} < 1$ avec $a, b \in \mathbb{N}$. Donc $b > a$ et $b - a > 0$. Comme $a, b > 0$, on a que $b - a > 1$. Donc

$$1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b} > \frac{1}{b}$$

Comme $10^b > b$ (voir lExercice 1.4.10), on a

$$1 - \frac{a}{b} > \frac{1}{10^b}$$

et finalement

$$\frac{a}{b} < 1 - \frac{1}{10^b} = 0.\underbrace{99999...9}_{b} < 0.999999(...)$$

Nous ne détaillerons pas ici la construction de Dedekind. Pour ce qui nous concerne, il nous suffit de savoir que les nombres réels $\mathbb{R}$ existent et qu'on a des inclusions évidentes

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

compatibles avec les opérations de somme $+$ et de produit $*$ et la relation d'ordre $\leq$.

**Remarque 3.2.5**

Chaque classe est strictement plus large que la précédente : par exemple $-1$ est un entier mais pas un nombre naturel, $\frac{1}{2}$ est rationnel mais pas un nombre entier, $\sqrt{2}$ est un nombre réel que n'est pas un nombre rationnel (voir Exemple 3.2.2).

Pour faire fonctionner le principe de raisonnement par récurrence (Théorème 1.3.6]) nous avons dû imposer l'Axiome 1.3.5. Puisque nous n'avons pas "expliqué l'origine" les nombres réels, afin d'établir les résultats dont nous avons besoin pour l'analyse des fonctions, nous devrons également imposer une propriété pour laquelle, sans entrer dans les détails de la construction de Dedekind, nous n'avons pas ici des moyens de démonstration. Cette propriété, appelée propriété de complétude, garantit essentiellement que, contrairement aux rationnels, entiers ou naturels, il n'y a pas d'espaces vides entre les nombres réels.

**Définition 3.2.6**

On appelle partie de $\mathbb{R}$ un sous-ensemble $E$ de $\mathbb{R}$. On écrit $E \subset \mathbb{R}$.

Si $a$, $b$ sont des nombres réels, on écrit

1. $[a, b]$ = partie de $\mathbb{R}$ constitué de tous les nombres réels $x$ avec $x \geq a$ et $x \leq b$ ;
2. $[a, b[$ = partie de $\mathbb{R}$ constitué de tous les nombres réels $x$ avec $x \geq a$ et $x < b$ ;
3. $]a, b[$ = partie de $\mathbb{R}$ constitué de tous les nombres réels $x$ avec $x > a$ et $x < b$ ;

On dit que (1) $[-, -]$ est fermé à gauche et à droite. On dit que (2) $[-, -[$ est fermé à gauche et ouvert è droite. On dit que (3) $]-, -[$ est ouvert.

Finalement, si $a$ est un nombre réel, on écrit

4. $[a, +\infty[$ = partie de $\mathbb{R}$ constitué de tous les nombres réels $x$ avec $x \geq a$ ;
5. $]a, +\infty$ = partie de $\mathbb{R}$ constitué de tous les nombres réels $x$ avec $x > a$ ;
6. $]-\infty, a]$ = partie de $\mathbb{R}$ constitué de tous les nombres réels $x$ avec $x \leq a$ ;
7. $]-\infty, a[$ = partie de $\mathbb{R}$ constitué de tous les nombres réels $x$ avec $x < a$ ;
8. $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

On appelle les parties de $\mathbb{R}$ de la forme (1)-(8) des *intervalles*.

**Exemple 3.2.7**

L'intervalle $[0, 1[$ constitué de tous les nombres réels $x \geq 0$ et $x < 1$ est fermé en $0$ et ouvert en $1$.

**Définition 3.2.8**

Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ une partie non-vide de $\mathbb{R}$.

— On dit que $E$ est majorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout element $e \in E$ on a $e \leq m$. Dans ce cas, on dit que $m$ est un majorant de $E$.

— On dit qu'un majorant $m$ de $E$ est une borne supérieure de $E$ si toutes les autres majorants de $E$ sont plus grandes que $m$, c'est-à-dire : $m$ est le plus petit majorant. Dans ce cas on appelle $m$ le *supremum* de $E$, et on écrit $m = sup(E)$. Il découle de cette définition que le supremum de $E$, s'il existe, est unique. En effet, si $m$ et $m'$ sont tous deux des borne supérieures, alors $m \leq m'$ et $m' \leq m$ donc $m = m'$.

— Si $sup(E) \in E$, on dit que $sup(E)$ est le maximum de $E$.

**Exemple 3.2.9**

— $[1, 3[$ est majoré par 3, 4, 1000, etc.
— $[1, 3]$ est aussi majoré par 3,4,1000, etc
— $[0, +\infty[$ est non-majoré.

Puisque nous n'avons pas expliqué la construction de Dedekind des nombres réels, nous ne pouvons pas prouver la propriété suivante. Par conséquent, nous la considérons ici comme un axiome.

**Axiome 3.2.10 Axiome de complétude**

Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ une partie non-vide et majorée. Alors $E$ admet une borne supérieure.

**Exemple 3.2.11**

— L'intervalle $[0, +\infty[$ est non-majoré donc par concerné par l'Axiome 3.2.10.
— L'intervalle $[0, 1[$ est majoré (par exemple, par 1) et donc l'Axiome 3.2.10 implique l'existence de $sup([0, 1[)$. On peut montrer que $sup([0, 1[) = 1$ (faire l'Exercice 3.9.2).

L'Axiome 3.2.10 implique certaines des propriétés des nombres réels qui rendent possible l'analyse.

**Proposition 3.2.12 Propriété Archimédienne**

Soit $x$ un nombre réel strictement positif. Alors il existe un nombre naturel suffisamment grand $N \in \mathbb{N}$ tel que $N$ dépasse $x$, ie, $N > x$.

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n \leq x$. Alors $x$ est un majorant de $\mathbb{N}$ et donc par l'Axiome 3.2.10, $\mathbb{N}$ admet une borne supérieure $sup(\mathbb{N})$. Prenons $n$ un entier. Alors $n + 1$ est aussi un entier et donc

par définition de borne supérieure, $n+1 \leq sup(\mathbb{N})$. Donc $n \leq sup(\mathbb{N}) - 1$. Le même raisonement marche pour tout entier $n$ et donc $sup(\mathbb{N}) - 1$ est aussi un majorant de $\mathbb{N}$. Mais par définition de borne supérieure, $sup(\mathbb{N})$ est le plus petit des majorants. Commen $sup(\mathbb{N}) - 1 < sup(\mathbb{N})$ on a trouvé une contradiction. L'hypothèse que $x$ est un majorant de $\mathbb{N}$ est donc fausse. □

**Remarque 3.2.13**

La propriété Archimédienne Proposition 3.2.12 implique aussi le fait suivant : Soient $a$ et $b$ des nombres réels strictement positifs. Alors il existe un nombre naturel $N$ tel que $N.a > b$. En effet, posons $x = \frac{b}{a}$ dans l'énonce Proposition 3.2.12 pour trouver $N > x = \frac{b}{a}$ et donc $N.a > b$.

**Remarque 3.2.14**

La propriété Archimédienne Proposition 3.2.12 implique aussi le fait suivant : pour tout nombre réel strictement positif $r$ il existe un nombre rationnel de la forme $\frac{1}{N}$ avec $0 < \frac{1}{n} < r$. Il suffit de prendre $a = r$ et $b = 1$ dans la Remarque 3.2.13.

**Remarque 3.2.15**

De manière tout à fait analogue à celle de Définition 3.2.8 on dit qu'une partie $F$ de $\mathbb{R}$ est minoré s'il existe un nombre réel $M$ tel que tout élément $f$ de $F$ est plus grand $m$, cad, $M \leq f$. On appelle borne inférieure de $F$ le plus grande minorant et on écrit $inf(F)$. Si $inf(F) \in F$ on dit que $inf(F)$ est le minimum de $F$.
L'axiome de complétude Axiome 3.2.10, implique que toute partie $F$ non-vide de $\mathbb{R}$ et minorée, admet une borne inférieure. En effet, posons donc

$$E = \text{ l'ensemble des minorants de } F$$

Par construction $E$ est non-vide car comme F est minoré, il existe au moins un élément de $E$. Par construction $E$ est majoré par n'importe lequel élément de $F$ : en effet, si $f \in F$ alors par définition pour tout $e \in E$ on a $e \leq f$ car e est un minorant de $F$. Donc $f$ est un majorant de $E$ et donc $E$ est majoré. Donc $E$ est non-vide et majoré e par l' Axiome 3.2.10 $E$ admet une borne supérieure, disons $s$.

On montre que $s = inf(F)$. On commence par montrer que $s$ est un minorant de $F$. Par construction, $s$ est le plus petit parmi les majorantes de$E$, donc $s \leq f$ pour tout $f$ dans $F$. En particulier, $s$ est un minorant de $F$, donc $s \in E$. Cependant, $s$ est plus grand que tous les éléments de $E$ donc s est le plus grand minorant de $F$. Donc par définition, $s = inf(F)$.

**Quizz 3.2.16**

Trouver un nombre rationnel entre $x = 10^{-6} = 0.000001$ et $y = 10^{-5} = 0.00001$.

**Proposition 3.2.17 (pas d'interruptions dans $\mathbb{R}$)**

Soient $x$ et $y$ deux nombres réels avec $x < y$. Alors il existe un nombre rationnel $w$ avec

$$x < w < y$$

*Démonstration.* Posons $d = y - x$. Comme $x < y$, $d$ est strictement positif. Par la Remarque 3.2.13 on sait qu'il existe un $n$ tel que $nd > 1$ (il suffit de poser $a = d$ et $b = 1$ dans la Remarque 3.2.13 ). Donc $nd = ny - nx > 1$. Cela signifie que la distance entre $nx$ et $ny$ est plus grand que $1$. On va montrer que comme la distance entre $nx$ et $ny$ est strictement supérieur à $1$, il existe nécessairement un nombre entier entre $nx$ et $ny$. Prenons $E$ l'ensemble des nombres entiers $m$ strictement plus grands que $nx$. Par Proposition 3.2.12, $E$ est non-vide et donc par l'Axiome 1.3.5 $E$ admet un élément minimal qu'on appelle $M$. On a deux possibilités pour $M$ :

— soit $M \geq ny$.
— soit $nx < M < ny$.

On montre que la deuxième possibilité est impossible. En effet, supposons $M \geq ny$. Alors comme $nd > 1$ on a

$$M - 1 > M - nd \geq ny - nd = ny - (ny - nx) = nx$$

Donc $M - 1 > nx$ et donc $(M - 1) \in E$. C'est donc une contradiction avec $M$ un élément minimal de $E$. □

**Remarque 3.2.18**

Dans la preuve de la Axiome 3.2.10, nous aurions pu dire, eh bien, prenons $w$ comme la moyenne de $x$ et $y$. Le problème c'est que si $x$ et $y$ sont des nombres irrationnels, leur moyenne $w$ n'est pas a priori dans $\mathbb{Q}$. L'intêret de la preuve de Axiome 3.2.10 c'est qu'on peut choisir $w$ un rationnel même si $x$ et $y$ ne le sont pas.

**Proposition 3.2.19**

Soit $x$ un nombre réel avec $x \geq 0$. Alors $x = 0$ si et seulement si pour tout nombre réel strictement positif $r > 0$ on a $x < r$.

*Démonstration.* Supposons que $x \neq 0$. Alors $x > 0$ et par Proposition 3.2.17 il existe un nombre rationnel $w$ tel que $0 < w < x$. Mais par hypothèse, si on pose

$r = w$ on a $x < w$ car $r = w > 0$. Donc on a une contradiction et donc il faut que $x = 0$. □

**Remarque 3.2.20**

Soit $x \leq y$. Supposons que pour tout $r > 0$ il existe un $x' \leq x$ et $y \leq y'$ tels que $y' - x' < r$. Alors $x = y$. En effet, posons $d = y - x$ la distance entre $x$ et $y$ et $d' = y' - x'$ la distance entre $x'$ et $y'$. Par hypothèse $d \leq d' < r$. Donc par la Proposition 3.2.19, $d = 0$ et donc $x = y$.

Pour terminer, voici une version renforcée du Proposition 3.2.17 qui sera nécessaire plus tard, par exemple pour montrer que la fonction exponentielle existe :

**Proposition 3.2.21 (pas d'interruptions dans $\mathbb{R}$) - version II**

Soient $E$ et $F$ des parties non-vides de $\mathbb{R}$ avec l'hypothèse suivant : tout élément de $E$ est plus petit que n'importe lequel élément de $F$.
Alors il existe un nombre réel $w$ tel que $w$ se trouve dans l'espace entre l'ensemble $E$ et l'ensemble $F$, c-à-d,

$$e \leq w \leq f$$

pour tout $e \in E$ et pour tout $f \in F$.

Pour que $w$ soit unique, il est suffisant que pour tout nombre $r > 0$, il existe un élément $e$ dans $E$ et un élément $f$ dans $F$ tels que $f - e < r$.

*Démonstration.* Par hypothése, n'importe lequel élément de $F$ est un majorant de $E$. De la même façon, n'importe lequel élément de $E$ est un minorant de $F$. Donc par l'axiome de complétude (Axiome 3.2.10) et sa version pour les bornes inférieurs (Remarque 3.2.15), on sait que $E$ admet une borne supérieure, qu'on appelle $m = sup(E)$, et $F$ admet une borne inférieure, qu'on appelle $M = inf(F)$. Par définition de borne supérieure, $m \leq f$ pour tout $f$ dans $F$ donc $m$ est un minorant de $F$, donc par définition de borne inférieure, $m \leq M$. Si $n = M$ on prendre $w = n = M$. Si $n < M$, on prendre $w$ un nombre rationnel entre $x = m$ et $y = M$ donnée par la Proposition 3.2.17. Finalement, la condition d'unicité c'est précisément la condition de la Remarque 3.2.20. □

## 3.3. Suites

Même si pour définir les nombres réels, il fallait éviter le choix d'approximations spécifiques, pour des raisons pratiques, nous aurons besoin de les utiliser. Introdui-

sons un peu de terminologie :

**Définition 3.3.1**

— Une suite de nombres réels est une liste infinie ordonnée de nombres (avec possibilité de répétition)

$$\underbrace{u_0}_{1^\circ \text{ élèment de la liste}}, \underbrace{u_1}_{2^\circ \text{ élèment de la liste}}, \underbrace{u_2}_{3^\circ \text{ élèment de la liste}}, \ldots, \underbrace{u_{n-1}}_{n^\circ \text{ élèment de la liste}}, \ldots$$

Nous écrivons de manière compacte $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour l'indiquer.

— On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement, décroissante) si pour tout $n \geq m$ on a $u_n \geq u_m$ (respectivement, $u_n \leq u_m$).

— On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement, minorée) sil existe un nombre réel $M$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq M$) .

**Exemple 3.3.2**

Voici quelques exemples :

1. La suite constante égale à zéro :

$$\underbrace{0}_{1^\circ \text{ élèment de la liste}}, \underbrace{0}_{2^\circ \text{ élèment de la liste}}, \underbrace{0}_{3^\circ \text{ élèment de la liste}}, \ldots, \underbrace{0}_{(n+1)^\circ \text{ élèment de la liste}}, \ldots$$

2. La suite alternée :

$$\underbrace{1}_{1^\circ \text{ élèment de la liste}}, \underbrace{-1}_{2^\circ \text{ élèment de la liste}}, \underbrace{1}_{3^\circ \text{ élèment de la liste}}, \ldots, \underbrace{(-1)^n}_{(n+1)^\circ \text{ élèment de la liste}}, \ldots$$

3. La suite décroissante

$$\underbrace{1}_{1^\circ \text{ élèment de la liste}}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{2^\circ \text{ élèment de la liste}}, \underbrace{\frac{1}{3}}_{3^\circ \text{ élèment de la liste}}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{n}}_{(n+1)^\circ \text{ élèment de la liste}}, \ldots$$

**Remarque 3.3.3**

Par exemple, dans Exemple 3.3.2 nous aimerions pouvoir isoler la propriété mathématique fondamental rendant la troisième suite (iii) une bonne approximation de zéro :

$$\frac{1}{1} = 1, \frac{1}{2} = 0.5, \frac{1}{3} = 0.333(...), ..., \frac{1}{10} = 0.1, ..., \frac{1}{100} = 0.01, ..., \frac{1}{10000} = 0.00001, ...$$

Pour cela, nous utilisons la caractérisation du $0$ donnée par la Proposition 3.2.19 : si $x \geq 0$ alors $x = 0$ si et seulement si pour tout $r > 0$ on a $x < r$. L'ingredient clé c'est la Remarque 3.2.14 : pour n'importe quel choix $0 < r$ on trouve un élément de la suite, $\frac{1}{N}$, avec $0 < \frac{1}{N} < r$. En plus, pour tout $n > N$, on a $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < r$.

Par contre, le deuxième exemple (ii), en raison de son comportement alterné, ne doit pas être considéré comme une approximation ni de $1$ ni de $-1$.

En nous inspirant de l'Remarque 3.3.3, nous arrivons finalement à une définition utile de la notion de bonne approximation :

**Définition 3.3.4**

Soir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite converge vers $u \in \mathbb{R}$ si elle vérifie la condition suivante :

pour tout $r > 0$, il existe une ordre $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, on a

$$|u_n - u| < r$$

[a]

Dans ce cas, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on écrit $u_n \to u$ pour indique que la limite est $u$. On utilisera aussi la notation

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u$$

pour dire la même chose, notamment, que la limite existe et est égale à $u$.

*a.* Voir l'Exercice 3.9.5

**Remarque 3.3.5**

La limite d'une suite, quand elle existe, est unique. En effet, si $u_n \to l$ et $u_n \to l'$ alors pour $r > 0$ il existe $N$ et $N'$ tels que pour tout $n > max(N, N')$ on a

$$|u_n - l| < r \quad \text{et} \quad |u_n - l'| < r$$

on peut utiliser l'inégalité triangulaire [a] et trouver

$$|l - l'| = |(l - u_n) - (l' - u_n)| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < 2r$$

Quitte à changer $r$, on a que $|l - l'|$ est strictement plus petit que tout réel strictement positif. Donc, $|l - l'| = 0$ par Remarque 3.2.14.

*a.* Voir l'Exercice 3.9.5

**Exemple 3.3.6**

— La suite $(u_n = \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$. En effet, c'est une conséquence directe de la discussion dans la Remarque 3.3.3.

— La suite $(u_n = (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente. En effet, pour tout ordre $n$ donné, nous aurons toujours des points successifs à une distance constante $|(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2$.

— La suite $(u_n = \frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$. En effet, on montre par récurrence que $2^n > n$. Donc $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$. Par l'Exercice 3.9.7-(5), $\frac{1}{2^n} \to 0$.

**Proposition 3.3.7 (Bolzano)**

Toute suite croissante et majorée est convergente.

*Démonstration.* C'est une conséquence de l'Axiome 3.2.10. En effet, prenons le sous-ensemble de $\mathbb{R}$

$$E = \{u_0, u_1, u_2, ....\}$$

des éléments de la suite. Par construction $E$ est non-vide, et par hypothèse, $E$ est majoré. L' Axiome 3.2.10 implique que $E$ admet une borne supérieure, $s$. On montre que $u_n \to s$. Fixons $r > 0$. Alors par la propriété de borne supérieure, il existe dans l'intervalle $]s - r, s + r[$ au moins un élément $u_N$ de la suite. Comme la suite est croissante, pour tout $n > N$, on a $s \geq u_n \geq u_N$ donc $u_n \in ]s - r, s + r[$. En particulier, $|u_n - s| < r$. Donc la suite converge vers $u$. □

**Remarque 3.3.8**

De manière similaire, en utilisant la Remarque 3.2.15, on montre que toute suite décroissante et minorée, est convergente.

Et pour finir notre boîte à outils sur les nombres réels :

**Proposition 3.3.9**

Soit $E$ une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $s$ la borne supérieure donnée par l'Axiome 3.2.10. Alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que chaque $u_n$ est un élément de $E$, et avec $u_n \to s$.

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $s - \frac{1}{n} < s$. Par définition de borne supérieure de $E$, il existe nécessairement un élément $u_n \in E$ tel que $s - \frac{1}{n} < u_n < s$. Posons $a_n = s$ la suite constante et posons $b_n = a_n - \frac{1}{n}$. Alors comme $a_n$ converge vers $s$ et $\frac{1}{n}$ converge vers $0$ (Exemple 3.3.6), par l'Exercice 3.9.7-(1), $b_n$ converge vers $s - 0 = s$. Finalement, comme $b_n \leq u_n \leq a_n$ et $b_n$ et $a_n$ on la même limite $s$, l'Exercice 3.9.7-(5) implique que $u_n$ converge aussi vers $s$. □

**Remarque 3.3.10**

La Proposition 3.3.9 admet une version pour la borne inférieure d'un ensemble minorée.

## 3.4. Fonctions continues et le théorème des valeurs intermédiaires.

Nous avons commencé ce chapitre (Section 2.1) en présentant plusieurs données climatiques importantes. Nous souhaitons maintenant analyser comment ces quantités (énergie, $CO_2$, température, etc.) s'influencent mutuellement, ou en d'autres termes, dépendent les unes des autres. La notion de fonction entre deux ensembles permet de donner un sens mathématique à cette idée.

**Définition 3.4.1**

Une fonction $f$ entre deux ensembles $X$, $Y$ est un sous-ensemble du produit $\Gamma \subseteq X \times Y$ tel que si $(x, y) \in \Gamma$ et $(x, y') \in \Gamma$ , alors $y = y'$. Concrètement, on pense à $\Gamma$ comme une loi $f$ qui à chaque élément $x \in X$ associe un unique élément $y = f(x)$ dans $Y$. On appelle le sous-ensemble $\Gamma$, le graphe de $f$. On appelle $X$ le domaine de définition de $f$, et $Y$ l'ensemble d'arrivée.

**Exemple 3.4.2 Carte Vitale**

La fonction $C$ ="numéro de carte Vitale" est la loi selon laquelle, à chaque élément $e$ d'un ensemble $S = \{Jacques, Olivia, Emilie, Hugo, etc\}$ de personnes (c'est-à-dire $e$ est une personne), on associe un élément $C(e)$ de l'ensemble $\mathbb{N}$,

avec $C(e)$= numéro de carte Vitale de la personne $e$. On écrit :

$$C : S \to \mathbb{N}$$

On observe que la loi ne doit pas être ambiguë - une personne donnée ne peut pas avoir plus qu'un numéro de carte Vitale. C'est bien pour cela qu'on demande dans la Définition 3.4.1 que l'élement $C(e)$ soit unique.

**Exemple 3.4.3**

Soit $F$ l'ensemble á deux éléments, $\{P, I\}$. La loi $f$ qu'à chaque nombre naturel $n \in \mathbb{N}$ associe sa parité, c'est à dire, $f(n) = P$ si $n$ est un nombre pair et $f(n) = I$ si $n$ est un nombre impair, détermine une fonction $f : \mathbb{N} \to F$.

**Exemple 3.4.4**

Le graphique dans l'exemple Fait 2.1.1 présente l'évolution du PIB mondial en fonction du temps. On peut le voir comme le graphe d'une fonction $f : [0, 2000] \to \mathbb{R}^+$.

**Exemple 3.4.5**

Le graphique dans l'exemple Fait 2.1.2 présente l'évolution de la population mondial en fonction du temps. On peut le voir comme le graphe d'une fonction $f : [0, 2000] \to \mathbb{R}^+$.

**Exemple 3.4.6**

Le graphique dans l'exemple Fait 2.1.2 contient le graphe de plusieurs fonctions :

— En rouge en bas, l'évolution de la consommation de biomasse en fonction du temps $B : [1800, 2019] \to \mathbb{R}^+$.

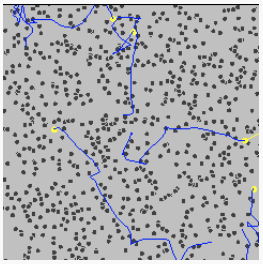
— En gris, l'évolution de la consommation de charbon en fonction du temps $C : [1800, 2019] \to \mathbb{R}^+$.

— En bleu , l'évolution de la consommation de pétrole en fonction du temps $P : [1800, 2019] \to \mathbb{R}^+$.

— etc.

**Exemple 3.4.7 Mouvement brownien**

La vitesse d'une particule en mouvement brownien en fonction du temps (voir le lien)

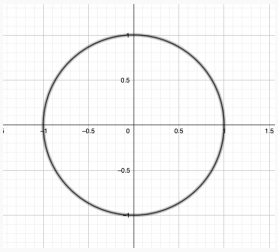
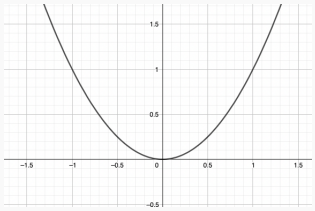
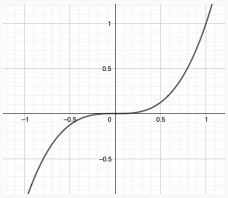
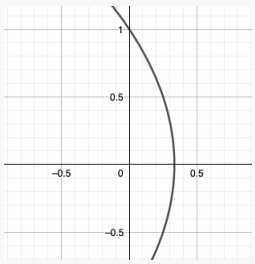
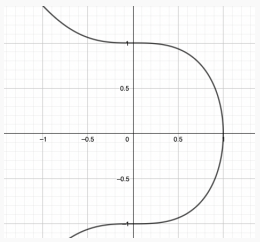
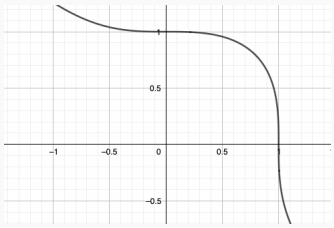
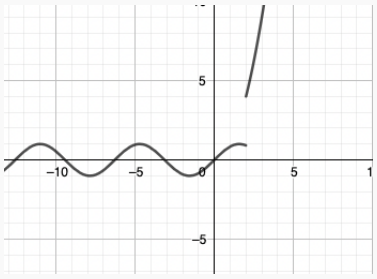
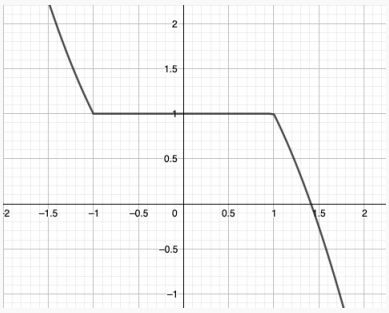


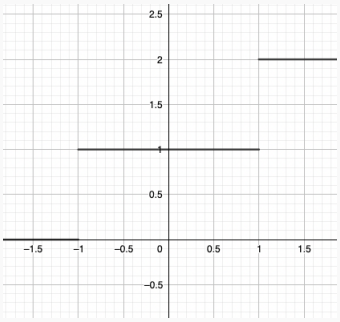
**Exemple 3.4.8 suite**

La notion de suite dans Définition 3.3.1 peut être reformulé de manière simple : une suite réelle est tout simplement une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

**Quizz 3.4.9**

Parmi les figures suivantes, lesquelles pourraient être le graphe d'une fonction avec domaine sur l'axe des $x$ ?




**Définition 3.4.10**

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions. La fonction composée est la fonction $g \circ f : X \to Z$ définie par $\forall x \in X$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

**Définition 3.4.11**

On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ :

— est injective : si pour tout $x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$.

— est surjective : si tout élément $y$ de $Y$ admet un antécédent, c'est á dire, pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$ ;

— est bijective : si $f$ est injective et surjective.

— admet une inverse si il existe une fonction $g : Y \to X$ tel que $f \circ g(y) = y$ pour tout $y \in Y$ et $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in X$.

**Proposition 3.4.12 Théorème de la bijection**

Soit $f : X \to Y$ une fonction bijective. Alors $f$ admet une fonction inverse.

*Démonstration.* Supposons que $f$ est bijective. Il s'agit donc de construire une inverse $g : Y \to X$. Comme f est surjective, chaque $y$ dans $Y$ admet un antécédent. Comme la fonction est injective, l'antécédent est unique, disons $g(y)$. La loi qui à $y$ associe le seul antécédent $g(y)$ est une fonction, qu'on appelle $g$. Par construction, $f(g(y)) = y$ car $g(y)$ est un antécédent de $y$. En même temps, $g(f(x)) = x$ car $g(f(x))$ et $x$ sont des antécédents de $f(x)$ et par hypothèse l'antécédant est unique.

Admettons maintenant que $f$ admet une fonction inverse $g$. On peut montrer que $f$ est injective et surjective. Pour voir que $f$ est injective, supposons que $f(x) = f(x')$. Alors comme g est une inverse, $x = g(f(x))$ et $g(f(x')) = x'$. Donc l'égalité $f(x) = f(x')$ implique $g(f(x)) = g(f(x'))$ et donc $x = x'$.

Pour la surjectivité, prenons $y \in Y$ et sont image par $g$, $g(y)$. Alors comme $f$ est inverse de $g$, $f(g(y)) = y$ donc $g(y)$ est un antécédent de $y$. □

**Définition 3.4.13**

Soit $I$ un intervalle (Définition 3.2.6) et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I$. On dit que $f$ est :

— croissante sur $I$ (resp. strictement croissante) si pour tout $a \leq b$ dans $I$, on a $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) < f(b)$).

— décroissante sur $I$ (resp. strictement décroissante) si pour tout $a \leq b$ dans $I$ on a $f(b) \leq f(a)$ (resp. $f(b) < f(a)$).

— monotone sur $I$ si elle est croissante sur $I$ ou décroissante sur $I$.

**Remarque 3.4.14**

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone est injective. En effet, supposons que $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$. Alors soit $x < y$ soit $y < x$. Dans les deux cas on a une contradiction. Supposons $x < y$. Alors comme f est strictement monotone, soit $f(x) < f(y)$ soit $f(x) > f(y)$. Contradiction. Le même argument marche pour le cas $y < x$.

**Remarque 3.4.15**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Par Remarque 3.4.14 elle est donc injective. Soit $J$ sont image. Alors $f : I \to J$ est une fonction bijective et par le Proposition 3.4.12 elle admet une fonction inverse $g : J \to I$. Alors $g$ est aussi strictement monotone. En effet, prenons $y < y'$ dans $J$. Alors $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Supposons que $x \geq x'$. Alors comme $f$ est strictement monotone, $y = f(x) \geq f(x') = y'$. Contradiction.

Nous introduisons maintenant la définition de fonction continue - nous disons que $f$ est continue en $x = a$ si $f$ est compatible avec toutes les choix possibles d'approximations de $a$.

**Définition 3.4.16**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ est continue en $a$ si pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n \to a$, $f$ est compatible avec passage à la limite, c'est à dire, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente avec

$$f(a) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n)$$

On dit que $f$ est continue si $f$ est continue en $a$ pour tout $a$ dans le domaine de $f$.

**Remarque 3.4.17**

1. C'est une conséquence directe de la Définition 3.4.16 que la composition de fonctions continues est continue. En effet, si on a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, prenons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente quelconque avec $u_n \to u$. Alors, comme $f$ est continue, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, avec
$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(u)$$
Comme $g$ est continue, la suite $(g(f(u_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente, avec
$$\lim_{n\to+\infty} g(f(u_n)) = g(f(u))$$
Donc la composée est continue.

2. C'est une conséquence directe de la Définition 3.4.16 et de la Exercice 3.9.7-(1) et (2), que la somme et le produit de fonctions continues est encore continue

**Exemple 3.4.18**

1. La fonction identité $f(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $f(x) = x^n$ peut être obtenu comme $n$-fois la fonction identité $x^n = \underbrace{x.x.x....x}_{n}$, donc par la Remarque 3.4.17-(2), est continue.

3. Le point précédent, en combinaison avec le fait que la somme de fonctions continues est continue (Remarque 3.4.17-(2)), implique que toute fonction polynomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ est continue.

**Remarque 3.4.19**

ans l'Exemple 3.4.18-(2) nous avons le droit de faire $x^n$ car par définition, nous avons le droit de multiplier les nombres réels. Il est beaucoup moins évident que nous ayons le droit d'extraire des racines carrées. Voir la Section 3.5 en bas.

Voici comment une hypothèse de continuité peut être utilisée comme un instrument

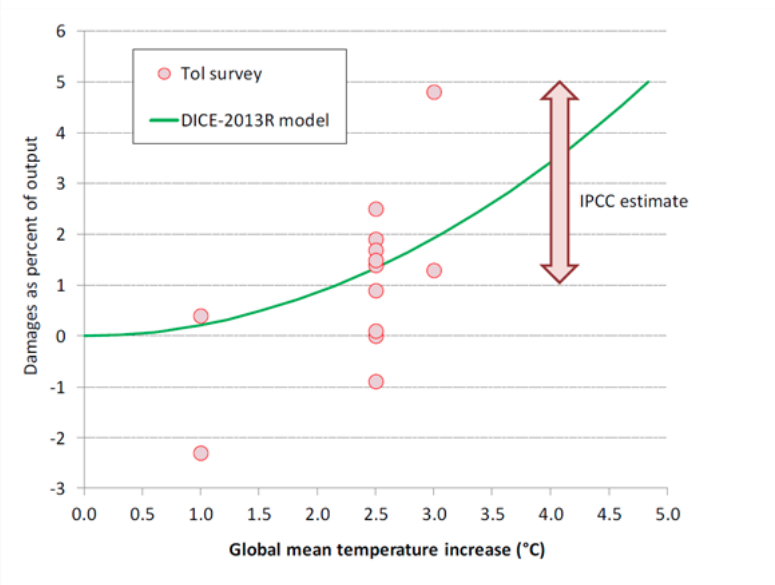
de manipulation idéologique :

**Exemple 3.4.20 Changement climatique et économie**

Le prix Nobel d'économie de 2018 a été décerné aux Américains William Nordhaus et Paul Romer, pour leurs travaux sur l'intégration du changement climatique et de l'innovation technologique dans l'analyse macro-économique. Dans leurs travaux, ils estiment dans quelle mesure chaque degré d'augmentation de température affectera le PIB. Pour faire ce calcul, ils supposent que l'impact ("damage") $D(T)$ provoqué par une augmentation de température de $T$ dégrées est une fonction quadratique

$$D(T) = 0.00227 * T^2$$

La fonction $D(t)$ est définie comme le ratio par lequel le PIB futur serait réduit, par rapport à l'absence de changement climatique. Voici les résultats qu'ils ont obtenus grâce à cette fonction :




Par construction, leur choix de fonction $D(T)$ est continue car polynomiale. D'après le graphique ci-dessus on constate que pour une différence de température de $T = 4$ dégrées, l'impact sur le PIB mondial est de $3,5\%$. À titre de comparaison, la crise de 2008 a eu un impact d'environ $4\%$ sur le PIB mondial, même que la crise du Covid.

Prenons le temps de réfléchir à leur modèle et de répéter ce que nous venons de dire - une augmentation de 4 degrés Celsius aurait un impact économique plus faible que la crise de 2008 et la crise de 2020. Comment est-il possible qu'un changement avec l'amplitude montrée par le Fait 2.1.20 ait moins d'impact

économique que la crise du Covid ? Qu'est-ce qui ne va pas dans leur modèle ?

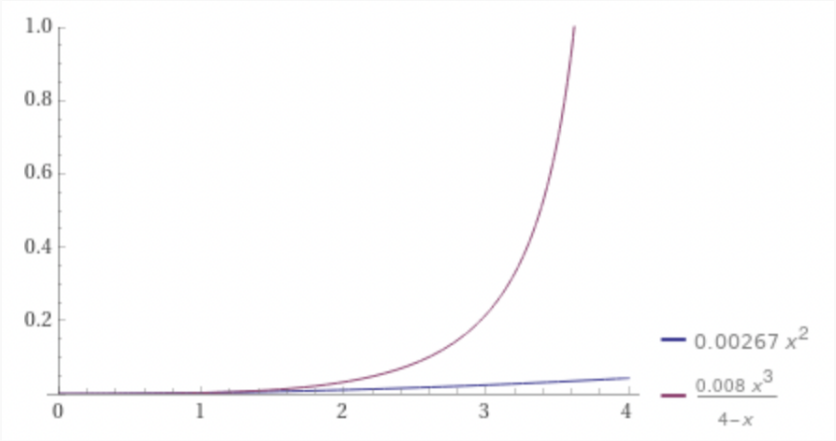
En bien - le problème c'est précisément l'hypothèse de base que la fonction d'impact $D(t)$ doit être continue. Le risque du changement climatique est précisément le risque d'une transition non-continue, d'un changement de régime. Un point de basculement dans le système climatique est un seuil tel que, lorsqu'il est dépassé, peut entraîner de grands changements dans l'état du système. Voici une version modifié de la fonction d'impact de Nordhaus avec un point de basculement en $T = 4$ dégrées :

$$D_b(T) = \frac{0.008T^3}{4 - T}$$

La différence entre $D_b$ et $D$ est négligeable jusqu'à 1 dégrée de plus. Par exemple $D_b(1) = D(1)$. Mais, pour une augmentation de 4 dégrées le résultat est très différent, par exemple

$$\lim_{T \to 4} D_b(T) = +\infty$$

et la fonction $D_b$ n'est plust continue en $T = 4$. Voici les graphes de $D_b$ et $D$.




La conclusion c'est que modèle de Nordhaus est continu par choix idéologique et élimine a priori l'éventualité d'un point de rupture. Le second modèle montre ce qui peut se passer si 4℃ est un point de rupture.

Imposer une hypothèse de continuité dans un processus qui lui-même par nature est non-continu, n'est qu'une manière mathématiquement subtile de nier idéologiquement la vraie nature du processus.

**Remarque 3.4.21**

La définition de fonction continue (en $x = a$) dans Définition 3.4.16 utilise les suites comme des choix particuliers pour approximer le nombre réel $a$.

On peut aussi donner une définition équivalente qui permet d'éviter les suites : on dit que $f$ est continue en $a$ si pour toute distance $\epsilon > 0$ de $f(a)$, il existe une distance $\delta > 0$ de $a$ tel que si $x$ est à une distance de $a$ strictement inférieure à $\delta$ alors $f(x)$ est à une distance de $f(a)$ strictement inférieure à $\epsilon$. En notation symbolique :

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{3.1}$$

ou encore :

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \exists \delta > 0\,, \forall x \in ]a - \delta, a + \delta[ \Rightarrow f(x) \in ]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[ \tag{3.2}$$

Montrons que les deux définitions sont équivalentes :

— supposons que $f$ vérifie la condition (3.1) en $a$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente avec $u_n \to a$. On veut montrer que $f(u_n) \to f(a)$. Soit donc $\epsilon > 0$. Prenons le $\delta$ donnée par (3.1). Alors comme la suite $u_n \to a$ est convergente, pour $\delta > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ on a $|u_n - a| < \delta$. Donc, par le choix de $\delta$ vérifiant la condition (3.1), on a pour tout $n > N$ aussi $|f(u_n) - f(a)| < \epsilon$.

— Supposons maintenant que $f$ ne vérifie pas la condition (3.1) en $a$. Dans ce cas, nous affirmons qu'il est possible de produire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n \to a$ et telle que $f(u_n)$ ne converge pas vers $f(a)$. En effet, la contraposée de (3.2) c'est

$$\exists\, \epsilon > 0\,, \forall \delta > 0\,, \exists x \in ]a - \delta, a + \delta[, \quad f(x) \notin ]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[ \tag{3.3}$$

Fixons donc $\epsilon > 0$ donnée par (3.3). Et donc pour chaque $n \geq 1$ on peut poser $\delta = \frac{1}{n}$ et déduire l'existence d'un $u_n \in ]a - \delta, a + \delta[$ tel que $f(u_n) \notin ]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$. Par construction la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a$ car pour tout $n$ on a $|u_n - a| < \frac{1}{n}$ (voir l'Exercice 3.9.6). Par contra la suite des $f(u_n)$ ne converge pas vers $f(a)$.

**Définition 3.4.22**

Soir $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle $I$ et soit $a \in I$. On dit que

— la limite $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe et est égale à $L^+ \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $0 < x - a < \delta$ on a $|f(x) - L^+| < \epsilon$.

— la limite $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existe et est égale à $L^-$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $a - x < \delta$ on a $|f(x) - L^-| < \epsilon$.

— $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si pour tout $\epsilon > 0$ , $\exists N$ tel que pour tout $x > N$ on a $|f(x) - L| < \epsilon$.

La Remarque 3.4.21 implique directement que :

**Corollaire 3.4.23**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle $I$. Soit $a \in I$. Alors $f$ est continue en $a$ si et seulement si les limites $\lim_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existent et on a

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

**Proposition 3.4.24**

Soit $X$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction réelle définie et croissante sur $X$. Soit $c \in \mathbb{R}$ avec la propriété suivant : si $I$ est un intervalle ouvert, et $c \in I$, alors $I \cap X \neq \emptyset$ . Soit

$$E = \{x \in X : x < c\}$$

Alors

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = sup(f(E)) \leq +\infty$$

*Démonstration.* On a deux cas. Soit $sup(f(E)) = +\infty$ soit $sup(f(E)) < +\infty$.

Considérons d'abord le deuxième cas. Par définition de borne inférieure, pour tout $r > 0$ il existe un $y \in f(E)$ avec

$$sup(f(E)) - r < y \leq sup(f(E))$$

Par définition de $f(E)$, il existe donc $c' \in X$, $c' < c$ avec $f(c') = y$. On obtient que pour tout $x$ avec $c' < x < c$, comme la fonction est croissante, on a

$$sup(f(E)) < f(c') = y \leq f(x) \leq sup(f(E))$$

On pose $\delta = c - c'$ . Par la Définition 3.4.22 on a

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = sup(f(E))$$

Supposons maintenant que $sup(f(E)) = +\infty$. Alors par définition de borne supérieure, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $c' < c$ avec $f(c') > M$. Donc pour tout $x$

avec $c' < x < c$, comme la fonction est croissante, on $f(x) \geq f(c') > M$. Donc par la Définition 3.4.22, on a $\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$.

□

**Théorème 3.4.25 (Théorème des valeurs intermédiaires)**

Soit $f$ une fonction réelle définie et continue sur l'intervalle $I$. Soient $u, w, v$ des nombres réels avec

$$u < w < v$$

Supposons qu'il existe $x$ dans $I$ tel que $u = f(x)$ et $y$ dans $I$ tel que $v = f(y)$. Alors il existe aussi $z$ dans $I$ tel que $w = f(z)$.

*Démonstration.* Supposons que $x < y$. Sinon, on change le rôle de $x$ e $y$. Prenons l'ensemble

$$E = \{t \in I : t \leq y, f(t) \leq w\}$$

Par hypothèse, comme $f(x) = u < w$, $E$ contient $x$ et donc $E$ est non-vide. Aussi par construction $E$ est majoré car si $t \in E$, alors $t \leq y$. Donc par l' Axiome 3.2.10 $E$ admet une borne supérieure, $s$ et par définition de borne supérieure, $s \leq y$ car y est un majorant.

On montre que la continuité de $f$ implique que $w = f(s)$, en deux étapes :

— $f(s) \leq w$ : Par la Proposition 3.3.9 on sait qu'il existe une suite d'elements dans $E$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_n \to s$. Par l'hipothèse de continuité de $f$, on a que $f(u_n) \to f(s)$. Mais par définition de $E$, pour chaque $n \geq 0$ on a $f(u_n) \leq w$. Donc par lExercice 3.9.7-(3) on sait que $f(s) \leq w$.

— $f(s) \geq w$ : Comme $w < v$, par l'item précédent on a $f(s) \leq w < v = f(y)$ et donc $s < y$. Pour tout $t$ avec $s < t < y$, on a donc $f(t) > w$. En effet, si $f(t) \leq w$, alors $t \in E$ et donc $t \leq s$. Encore par la Proposition 3.3.9 il existe une suite d'élements $s < t_n < y$ avec $t_n \to s$ avec $f(t_n) > w$. Par la continuité de $f$ et Exercice 3.9.7-(3) on sait que $f(s) \geq w$.

□

**Preuve 3.4.26 du théorème Théorème 3.1.2)**

En effet, c'est une conséquence du Théorème 3.4.25. On considère l'angle $\theta$ sur l'équateur avec $\theta \in \mathbb{R}$. On suppose que la température est une fonction continue $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec la condition périodique $T(x) = T(x + 2\pi)$. On considère donc la fonction de rotation de $180°$ :

$$R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

définie par $R(\theta) = \theta + \pi$. La fonction $R$ est continue. On pose la fonction sur

$\Delta T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Delta T(\theta) = T(R(\theta)) - T(\theta)$$

La fonction $\Delta T$ est continue (somme de fonctions continues). Aussi, par construction, $\Delta T(0) = T(\pi) - T(0)$ et $\Delta T(\pi) = T(2\pi) - T(\pi) = T(0) - T(\pi)$ donc $\Delta T(0) = -\Delta T(\pi)$. Si $\Delta T(0) = 0$, on a fini la preuve. Supposons $\Delta T(0) \neq 0$. Comme $\Delta T(0) = -\Delta T(\pi)$ et $\Delta T(0) \neq 0$, soit $\Delta T(0) > 0$ et $\Delta T(\pi) < 0$ soit $\Delta T(0) < 0$ et $\Delta T(\pi) > 0$. Comme $\Delta T(0) < 0 < \Delta T(\pi)$ ou $\Delta T(\pi) < 0 < \Delta T(0)$, dans les deux cas le Théorème 3.4.25 implique l'existence d'un point $c \in [0, \pi]$ où $\Delta T(c) = 0$, donc $T(c) = T(c + \pi)$.

**Remarque 3.4.27**

Le Théorème 3.4.25 peut aussi être énoncé de la façon suivante :

Soit $f$ une fonction réelle, continue, définie sur un intervalle $I$. Alors l'ensemble image de $I$, $f(I)$, est aussi un intervalle. Pour montrer ça on a besoin d'une caractérisation des intervalles : soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$. Alors $E$ est un intervalle si et seulement si pour tout $x, y \in E$ et $x < z < y$, alors $z \in E$.

La condition est clairement nécessaire. Pour montrer qu'elle est aussi suffisant, prenons le $inf(E)$ et le $sup(E)$ (on peut avoir $inf(E) = -\infty$ ou $sup(E) = +\infty$). Prenons donc $z \in \mathbb{R}$ avec $inf(E) < z < sup(E)$. On cherche à montrer que $z \in E$. Mais par définition de $inf(E)$ il existe donc $x \in E$ avec $inf(E) < x < z$ (sinon $z$ serait $\geq inf(E)$). Par définition de $sup(E)$, il existe $y \in E$ avec $z < y < sup(E)$ donc $x < z < y$ avec $x, y \in E$ et par l'hypothèse $z \in E$. Il faut donc que $E$ soit de la forme

$$[inf(E), sup(E)], \quad ]inf(E)), sup(E)], \quad [inf(E), sup(E)[ \text{ ou } ]inf(E), sup(E)[$$

## 3.5. Existence des racines $n$-ièmes

Dans Exemple 3.2.2 nous avons construit une séquence qui converge vers $\sqrt{2}$. Ce n'est pas évident qu'il existe une racine carrée unique pour chaque nombre positif. En fait, nous disposons déjà de presque tous les outils nécessaires pour montrer que des nombres tels que $\sqrt[n]{a}$ existent pour tout nombre réel positif $a$ :

**Théorème 3.5.1 (Théorème de la bijection - version continue)**

Soit $f$ une fonction réelle continue, strictement monotone,définie sur un intervalle $I$. Soit $J$ sont image que par le Théorème 3.4.25 et la Remarque 3.4.27 est aussi un intervalle. Alors la fonction $f$ admet une fonction inverse $g : J \to I$, continue et strictement monotone.

*Démonstration.* On commence par montrer l'existence de l'inverse. Grâce á la Remarque 3.4.14, la fonction est injective sur $I$. Par définition de l'image, $f$ est surjective sur $J$. Donc par le Proposition 3.4.12 $f$ admet une fonction inverse $g : J \to I$. Par la Remarque 3.4.15, $g$ est strictement monotone. Il reste à démontrer que $g$ est une fonction continue (Définition 3.4.16).
Prenons $y \in J$ et supposons que $g(y)$ n'est pas une borne de $I$. Supposons $f$ strictement croissante (le même argument marche pour $f$ strictement décroissante ) . Soit $y_n \to y$ une suite d'élements de $J$ qui converge vers $y$. Ils faut montrer que $g(y_n) \to g(y)$. Prenons $\epsilon > 0$ tel que l'intervalle $]g(y) - \epsilon, g(y) + \epsilon[$ soit encore contenu dans $I$. Comme $f$ est strictement croissante, on a

$$f(g(y) - \epsilon) < f(g(y)) = y < f(g(y) + \epsilon)$$

Comme $y_n \to y$, il existe un $N > 0$ tel que pour tout $n > N$ on a $f(g(y) - \epsilon) < y_n < f(g(y) + \epsilon)$. Comme $g$ est strictement croissante, on aura aussi

$$g(y) - \epsilon = g(f(g(y) - \epsilon)) < g(y_n) < g(f(g(y) + \epsilon)) = g(y) + \epsilon$$

et donc $g(y_n) \to g(y)$. Il reste le cas où $g(y)$ est une borne de $I$. Le même argument marche, il suffit de considérer des "demi-intervalles". □

**Corollaire 3.5.2**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Soit $a$ un nombre réel positif. Alors $a$ admet une unique racine $n$-ième $\sqrt[n]{a}$ positive. En plus, la fonction $\sqrt[n]{-} : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ est bien définie et strictement croissante.

*Démonstration.* Prenons la fonction $f(x) = x^n$ définie sur $[0, +\infty[ \to [0, +\infty[$. Alors $f$ est continue (par Exemple 3.4.18-(2)). On vérifie aussi que $f$ est strictement monotone : en effet, si $[x, y, z, \in [0, +\infty[$ et $x < y$ alors $x.z < y.z$. Donc, $x.x < x.y < y.y$. Par récurrence, $x^n < y^n$.

Finalement, par le Théorème 3.5.1, $f$ admet une fonction inverse $g : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ aussi strictement monotone. Par définition de fonction inverse, on a pour chaque $a \geq 0$, $f(g(a)) = g(a)^n = a$. Donc $g(a)$ est une racine n-ième de $a$. Par le theóreme de la bijection elle est donc unique sur $[0, +\infty[$. □

## 3.6. Existence de maximum et minimum

Pour conclure notre libraire de théorèmes pour les fonctions continues, on montre que toute fonction continue définie sur un intervalle fermé admet un maximum et un minimum. Pour démontrer ce résultat on aura besoin de quelques notions préliminaires :

**Définition 3.6.1**

— Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ admet un maximum en $a \in \mathbb{R}$ si pour tout $x \in I$ on a $f(a) \geq f(x)$. Dans ce cas, on dit que $m = f(a)$ est un maximum de $f$ sur $I$. On dit que $f$ admet un minimum en $a \in I$ si pour tout $x \in I$ on a $f(a) \leq f(x)$. On dit que $f(a)$ est un extremum de $f$ s'il s'agit d'un maximum ou minimum de $f$.

— On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en $a \in I$ s'il existe un intervalle $J \subseteq I$ avec $a \in J$ tel que pour tout $x \in J$ on a $f(a) \geq f(x)$ ( resp. $f(a) \leq f(x)$).

**Définition 3.6.2**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On peut la voir comme une fonction $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Une sous-suite de $x$ est la donnée d'une fonction strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et de la nouvelle suite donnée par la composition $x \circ \phi$. On la note par $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

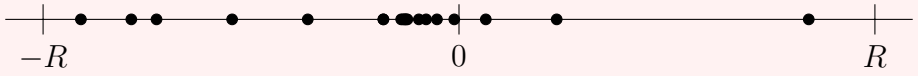
**Remarque 3.6.3**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente avec $x_n \to x$. Alors toute sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $x$. En effet, prenons $(x_{n_k})$ une sous-suite et $\epsilon > 0$. Comme la suite des $x_n$ converge vers $x$, il existe $N$ tel que pour tout $n > N$, on a $|x_n - x| < \epsilon$. Par définition de sous-suite, il existe donc un $K > 0$ tel que pour tout $k > K$ on aura $n_k > N$. Donc, on aura que pour tout $k > K$, $|x_{n_k} - x| < \epsilon$.

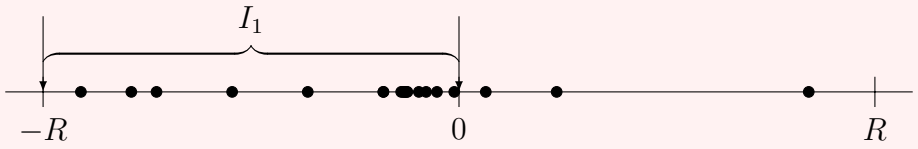
**Proposition 3.6.4**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite majorée et minorée. Alors on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente.

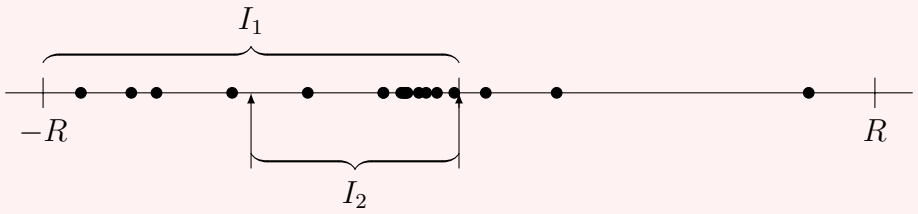
*Démonstration.* Il s'agit une stratégie de chasse. Comme la suite est bornée, on peut supposer qu'il existe $R > 0$ assez grand tel que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[-R, R]$.



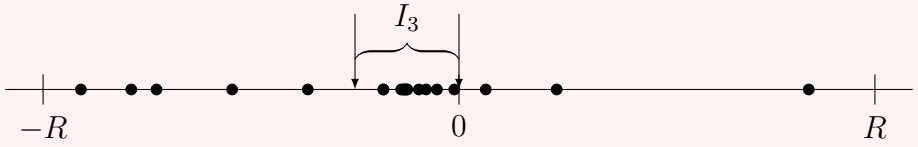

On découpe l'intervalle $[-R, R]$ et on prend une des moitiés contenant une infinité de termes. C'est possible que les deux moitiés aient une infinité de termes, dans ce cas, choisissez une moitié quelconque. Ici, par exemple on prendre $I_1$ :



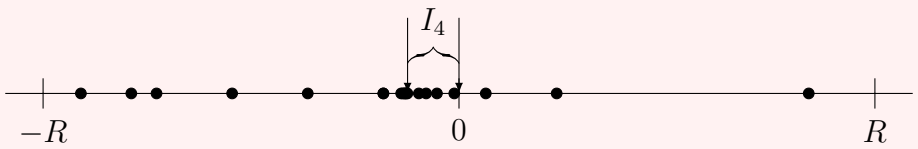

Nous appliquons la stratégie pour $I_1$ : nous découpons $I_1$ en deux et nous choisissons l'une des moitiés contenant une infinité de termes. Ici, par exemple, $I_2$ :



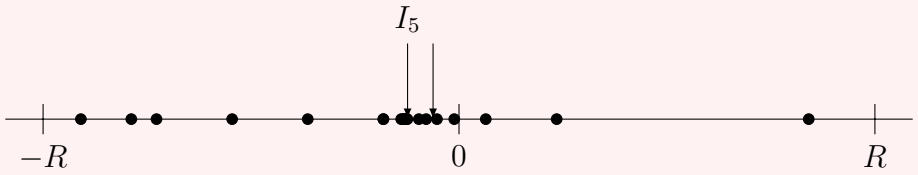

De même pour $I_2$ :




pour $I_3$




pour $I_4$




etc.

On se retrouve donc avec une suite infinie d'intervalles, le suivant un sous-ensemble du précédent

$$... \subseteq I_5 \subseteq I_4 \subseteq I_3 \subseteq I_2 \subseteq I_1 \subseteq [-R, R]$$

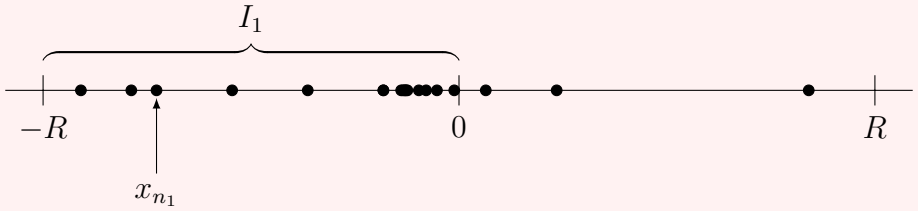
et par construction, l'intervalle $I_n$ a une longueur $\frac{R}{2^n}$. On pose :

$$a_n = min\, I_n \quad , \quad b_n = max\, I_n$$

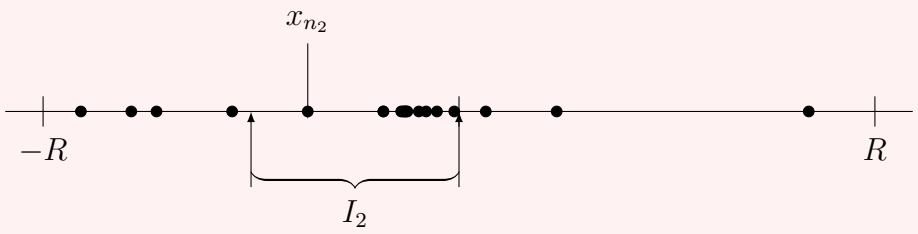
les extrémités des intervalles successifs. Par construction la suite des $a_n$ est croissante et la suite des $b_n$ et décroissante. Aussi, on a que $b_n - a_n = \frac{R}{2^n}$ donc $(b_n - a_n) \to 0$. Les suites $a_n$ et $b_n$ sont donc convergentes avec la même limite (voir Exercice 3.9.7-(6)).

On construit maintenant une sous-suite $u$ de $(x_n)$ par la recette suivante :

Le premier terme c'est $u_0 = x_0$. Pour le deuxième terme, peut-être que $x_1$, $x_2$, etc ne sont pas dans $I_1$ mais comme par construction $I_1$ contient un nombre infinie de termes il aura surement un premier élément de la suite, disons $x_{n_1}$ qui est dans $I_1$. Posons $u_1 = x_{n_1}$ ce premier terme.




De la même façon pour $I_2$, peut-être que $x_{n_1+1}$, $x_{n_1+2}$, etc ne sont pas dans $I_2$ mais comme par construction $I_2$ contient aussi un nombre infinie de termes il aura surement un premier élément de la suite, disons $x_{n_2}$ qui est dans $I_2$. Posons $u_2 = x_{n_2}$ :




En itérant cette construction, nous avons construit une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ avec $x_{n_k} \in I_k$, donc

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$$

Par l'Exercice 3.9.7-5, comme les deux suites $a_n$ et $b_n$ sont convergentes, la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ aussi.

□

**Théorème 3.6.5**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors $f$ atteint une valeur maximale et une valeur minimale.

*Démonstration.* On donne l'argument pour le maximum. Le même argument marche aussi pour le minimum. On commence par montrer que $f$ est majorée. Supposons que $f$ n'est pas majorée. Alors pour tout $n > 0$ il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. A priori le suite $(x_n)$ n'est pas convergente mais par Proposition 3.6.4 on peut extraire une sous-suite convergente $u_n \to u$. Alors comme $f$ est continue,$f(u_n) \to f(u)$. On a donc une contradiction.

Prenons $J = f([a, b])$ l'image de $f$. Comme $J$ est non-vide et $f$ est majorée, par l'Axiome 3.2.10 $J$ admet une borne supérieure, disons $M$. On montre qu'il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$. Par la Proposition 3.3.9, il existe une suite d'élements $y_n \in J$ tel que $y_n \to M$. Par définition de $J$, pour chaque $y_n$ il existe un élément $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) = y_n$. Par la Proposition 3.6.4 la suite $(x_n)$ admet une sous-suite convergente, disons $(x_{n_k}) \to x$. Comme $f$ est continue, $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Mais $f(x_{n_k})$ est une sous-suite de $y_n$ et donc par la Remarque 3.6.3 , $f(x_{n_k}) \to M$. Comme la limite est unique (Remarque 3.3.5), on a $f(x)) = M$. □

## 3.7. Taux de Variation et la fonction dérivée

**Remarque 3.7.1**

Il ne suffit pas de connaître la configuration instantanée d'un système pour prédire son évolution. Cliquez sur la vidéo :

Ce qui est curieux dans cette vidéo, ce n'est évidemment pas la description de la photo. Ce qui est inhabituel, c'est précisément le vecteur vitesse. Si nous avions eu la connaissance préalable des vitesses, nous n'aurions pas été pris par surprise.

**Exemple 3.7.2**

Dans le Fait 2.1.16 ce qui est également inédit, ce n'est pas la valeur absolue de la température mais le rythme du changement.

**Définition 3.7.3**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a$ un point à l'interieur de $I$. On considère la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.4}$$

On dit que la fonction $f$ est dérivable en un point $a$ si la limite (3.4) existe. On dit que $f$ est dérivable si elle est dérivable en tout point $a$ dans sont domaine. Si la fonction est dérivable on pose $f' : I \to \mathbb{R}$ la fonction

$$a \mapsto f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On appelle $f'$ la fonction dérivée de $f$.

**Exemple 3.7.4**

— La fonction constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, pour chaque $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

donc $f' = 0$ est la fonction nulle.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. La fonction $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

La formule du binôme (exercice : montrer par récurrence) donne $(x+h)^n = x^n + h.\sum_{i\geq 1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}.h^{i-1}$, d'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + h.\sum_{i\geq 1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}.h^{i-1} - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h.\sum_{i\geq 1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}.h^{i-1}}{h} = n.x^{n-1}$$

d'où $(x^n)' = n.x^{n-1}$.

— La fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$. En effet,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|(0+h)| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|(0+h)| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

**Proposition 3.7.5**

1. La somme de fonctions dérivables en en point $a$ est dérivable en $a$.
2. Le produit de fonctions $f$ et $g$ dérivables en $a$ est dérivable en $a$.
3. Si $g : I \to J$ est dérivable en $a \in I$ et $f : J \to \mathbb{R}$ est dérivable en $f(a)$, alors $f \circ g$ est dérivable en $a$.

4. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $I$ alors $f$ est continue en $I$.

5. Si $f : I \to J$ est dérivable en $a \in I$ avec $f'(a) \neq 0$ et $f$ admet une fonction inverse $g$ continue, alors l'inverse est dérivable en $f(a)$ et on a $g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

*Démonstration.*

1. Exercice.

2. On démontre (2) : En effet :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(fg)(a+h) - (f.g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h).g(a+h) - f(a).g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h).g(a+h) - f(a).g(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h).g(a+h) - f(a+h).g(a) + f(a+h).g(a) - f(a).g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h).(g(a+h) - g(a)) + g(a)(f(a+h) - f(a))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h).(g(a+h) - g(a))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a)(f(a+h) - f(a))}{h}$$

$$= f(a).g'(a) + g(a).f'(a)$$

d'où $(f.g)' = f'g + f.g'$.

3. Supposons $f$ et $g$ dérivables. On veut calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x)))}{h}$$

Comme $g$ est dérivable, on pose

$$v = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x), \quad \lim_{h\to 0} v = 0$$

Comme $f$ est dérivable, on pose

$$w = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x), \quad \lim_{h\to 0} w = 0$$

Par construction, on a

$$g(x+h) = h(v + g'(x)) + g(x)$$

$$f(y+k) = k(w + f'(y)) + f(y)$$

On pose $y = g(x)$ et $k = (v + g'(x))h$. Donc,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x)))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(w + f'(g(x)))(v + g'(x))h}{h} = f'(g(x)).g'(x)$$

4. Exercice.

5. On montre (5). Comme $g$ est inverse de $f$, pour chaque $b \in J$ il existe un unique $a \in I$ avec $f(a) = b$. On veut donc montrer que la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(b+h) - g(b)}{h}$$

existe et est égale à $\frac{1}{f'(a)}$. On pose

$$k = g(b+h) - g(b) = g(f(a) + h) - a$$

Alors,

$$a + k = g(b+h)$$

ou de façon équivalente $f(a+k) = b + h$. Il faut donc montrer que la limite $\lim_{h\to 0} \frac{k}{h}$ existe et est égale à $\frac{1}{f'(a)}$. Comme $g$ est continue, on a $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$. Comme $h = b + h - b$, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{(b+h) - b} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{(f(a+k) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

□

**Proposition 3.7.6**

Soit $f : I = ]a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout $x \in I$. Soit $x_0 \in I$. Si $x_0$ est un extremum local de $f$ en $I$ (Définition 3.6.1) alors $f'(x_0) = 0$.

*Démonstration.* On présente l'argument dans le cas où $f(x_0)$ est un maximum. C'est facile d'adapter l'argument pour le cas où $f(x_0)$ est un minimum.

Comme $f$ est dérivable en $I$, la limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe. En particulier, chaque limite $h \to 0^+$ et $h \to 0^-$ existe aussi et

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Comme $x_0$ est un maximum local, pour $h > 0$, on a $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$ et donc par passage à la limite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

Pour $h < 0$, on a $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$. Comme $h < 0$, on a par passage à la limite

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

Comme la limite existe, on a $f'(x_0) = 0$.

□

**Théorème 3.7.7 (Rolle)**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $a < b$, dérivable sur $]a, b[$ et tel que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

*Démonstration.* Par le Théorème 3.6.5 la fonction admet un maximum $M$ et un minimum $m$ sur l'intervalle $[a, b]$. Si l'un des deux est atteint en un point $]a, b[$, on a, par le Proposition 3.7.6 que $f'(c) = 0$. Il reste donc le cas où le maximum et minimum t tous les deux atteints aux bornes du segment. Mais comme on suppose $f(a) = f(b)$, on a $M = m$. Comme par définition de maximum et minimum on a $m \leq f(x) \leq M$ et $m = M$, la fonction est constante. Donc sa dérivée est nulle en tout point $c$ de l'intervalle. □

**Corollaire 3.7.8**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $a < b$, dérivable sur $]a, b[$ et tel que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(c)$$

.

*Démonstration.* On pose $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ et on applique le Corollaire 3.7.8 à $h = f - g$. □

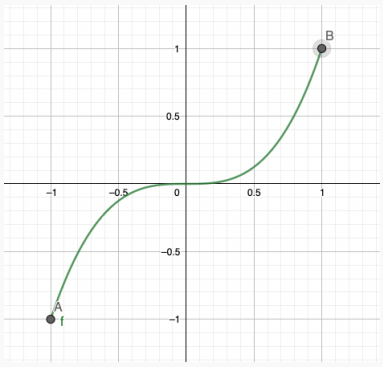
**Exemple 3.7.9**

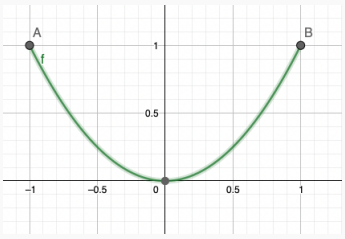
Je suis parti en voyage en voiture. À 14h10 je suis entré sur l'autoroute, et à 15h j'ai quitté l'autoroute après avoir parcouru 120 Km. En sortant, je me suis fait arrêter par la police qui a affirmé que j'avais dépassé la limite de vitesse à un moment donné de mon trajet. Pourquoi ?

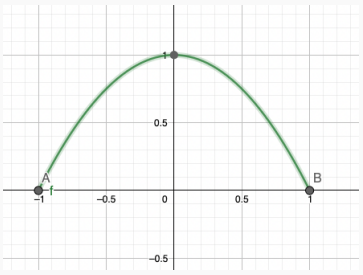
Le Corollaire 3.7.8 dit qu'à un moment donné ma vitesse instantanée a dû être égale à ma vitesse moyenne. Comme ma vitesse moyenne $(= 130/0.8 = 132Km/h)$ était supérieure à la limite légale, alors à un moment donné entre 14h10 et 15h ma vitesse instantanée a aussi dépassé la limite légale.

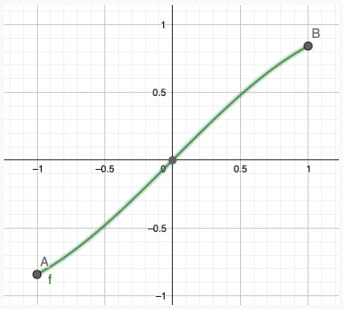
**Quizz 3.7.10**

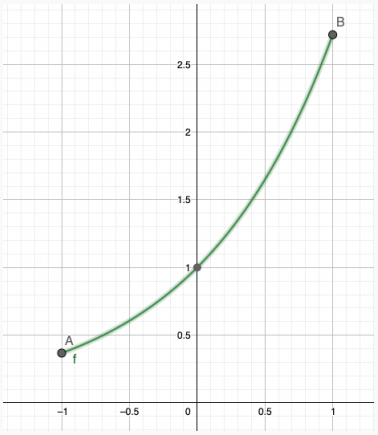
Pour chaque exemple, expliquer si le Corollaire 3.7.8 s'applique et si oui, trouver un point $c$ comme dans l'énoncé :

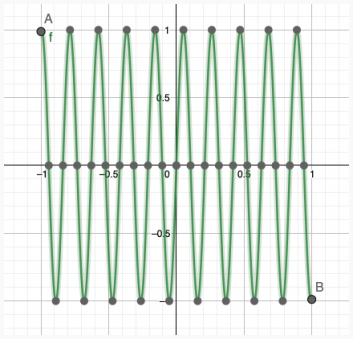


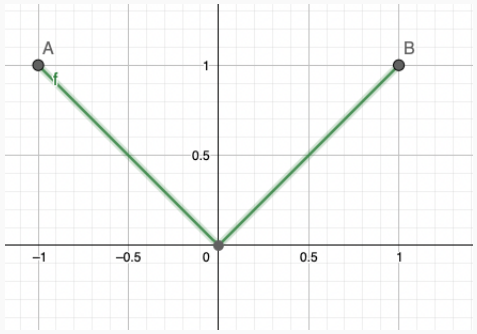






C'est grâce à ce théorème que l'on peut démontrer qu'une fonction dont la dérivée est positive est croissante :

**Corollaire 3.7.11**

Soit $f$ une fonction dérivable sur intervalle $I$. Alors :

— Si $f'$ est positive alors $f$ est croissante.

— Si $f'$ est strictement positive alors $f$ est strictement croissante.

— Si $f'$ est négative alors $f$ est décroissante.

— Si $f'$ est strictement négative alors $f$ est strictement décroissante.

— Si $f'$ est positive alors $f$ est croissante.

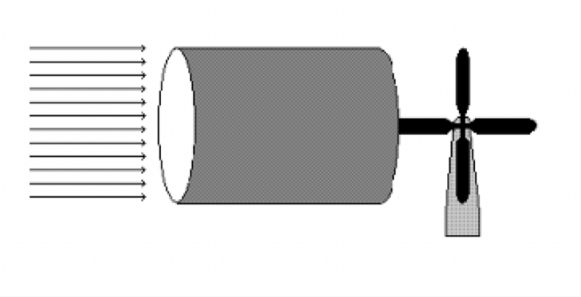
— Si $f'$ est la fonction nulle alors $f$ est constante.

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du Corollaire 3.7.8. On donne une démonstration pour le deuxième cas : Supposons $b > a$. On veut montrer que $f(b) > f(a)$ ou de façon équivalente, que $f(b) - f(a) > 0$. Par le Corollaire 3.7.8 on a $f(b) - f(a) = (b - a).f'(c)$. Comme $b > a$, on a $b - a > 0$. Aussi, comme $f' > 0$, on a $f'(c) > 0$. Donc $f(b) - f(a) = (b - a).f'(c) > 0$.

□

**Exemple 3.7.12 (Rendement maximal d'une éolienne)**

On considère une masse d'air à vitesse constante $v$ traversant une éolienne de rayon $r$.



L'énérgie cinétique de l'air est donnée par

$$E = \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}(\rho.v.t\pi.r^2).v^2 = \frac{1}{2}.\rho.t.r^2.\pi.v^3$$

où $v.t\pi.r^2$ c'est le volume d'air et $\rho$ sa densité. La puissance énergétique (voir Exemple 4.1.7 ) est donc donnée par

$$W = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}.\rho.r^2.\pi.v^3$$

donc une fonction de $v^3$.

Supposons donc une éolienne avec un rendement de $40\%$ avec $v = 10m/s$ (=36 Km/h), $r = 100m$, et $\rho = 1.2\ Kg/m^2$ . On aura donc une puissance de

$$W = 0.4 * (10)^3 * 100^2 * 1.2 * \pi \sim 10^7 \text{ Watts}$$

Par comparaison, une central nucléaire a une puissance d'environ $1GW = 10^9$ Watts. Donc, pour la même puissance, on aurait besoin de $\frac{10^9}{10^7} = 10^2 = 100$ éoliennes.

On peut démontrer par des principes physiques que le rendement théorique d'une éolienne est donné par la formule

$$\eta = \frac{1}{2}(1+\delta)(1-\delta^2)$$

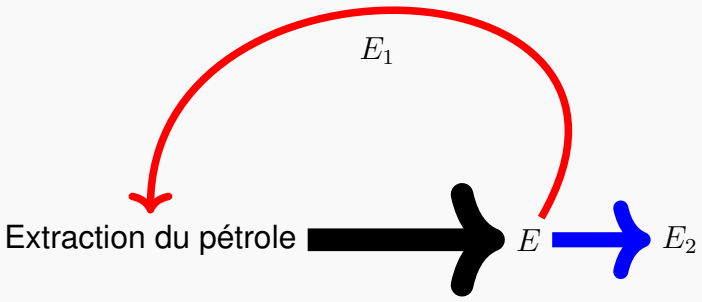
où $\delta$ est le ratio $\frac{v_f}{v}$ entre la vitesse de l'air après le passage $(v_f)$ et avant $(v)$. On peut calculer le maximum de $\eta$ comme application de la Proposition 3.7.6. On a

$$\eta'(\delta) = \frac{1}{2} - \delta - \frac{3}{2}\delta^2 = -\frac{1}{2}(3\delta^2 + 2\delta - 1) = -\frac{1}{2}(\delta+1)(\delta - \frac{1}{3})$$

La solution $\delta = -1$ n'a pas de sens physique car $\eta(-1) = 0$. Par contre pour $\delta = \frac{1}{3}$ on a $\eta(\frac{1}{3}) = \frac{16}{27}$. Il reste à montrer que c'est un maximum. Il suffit de montrer que la fonction $\eta$ est strictement croissante sur $0 < \delta < \frac{1}{3}$ et strictement décroissante pour $\frac{1}{3} < \delta < 1$. Par le Corollaire 3.7.11, il suffit donc de montrer que $\frac{d\eta}{d\delta} > 0$ pour $0 < \delta < \frac{1}{3}$ et $\frac{d\eta}{d\delta} < 0$ pour $\frac{1}{3} < \delta < 1$. En effet, on a $\frac{d\eta}{d\delta} > 0$ pour $\delta \in ]-1, \frac{1}{3}[$ et $\frac{d\eta}{d\delta} < 0$ pour $\delta \in ]-\infty, -1[ \cup ]\frac{1}{3}, +\infty[$. Le maximum $\eta_{max} = \frac{16}{27} \sim 59\%$ est aussi connu comme limite de Betz.

**Exemple 3.7.13 Taux de retour énergétique**

Nous considérons ici un modèle simplifié de la production mondiale de pétrole pour comprendre le risque associé à un coût énergétique croissant d'extraction. Considérons l'ensemble de l'extraction pétrolière mondiale formée par un gigantesque gisement de pétrole (la planète Terre). Le pétrole se trouvant à une certaine profondeur, une partie des coûts d'extraction sera d'ordre énergétique : une partie du pétrole que nous extrayons servira à produire de l'énergie pour l'extraction proprement dite. Le reste, nous pourrons le vendre sur le marché. Plus précisément, si $E$ c'est la quantité totale d'énergie extraite (en Joules), il y a une partie $E_1$ de l'énergie qu'il faut redonner aux machines d'extraction et une partie $E_2$ qu'on peut donc vendre.




$$E = E_1 + E_2$$

Nous définissons le taux de retour énergétique $\tau$ (EROI) comme le ratio

$$\tau = \frac{E}{E_1}$$

Voici l´évolution de $\tau = EROI$ pour la production mondiale de pétrole

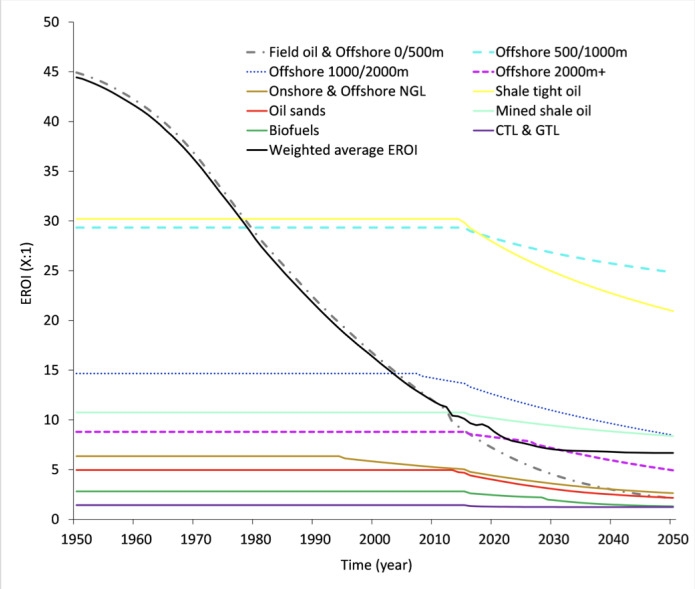



**Figure 2:** Evolution of each liquid standard EROI and the weighted average EROI, from 1950 to 2050.

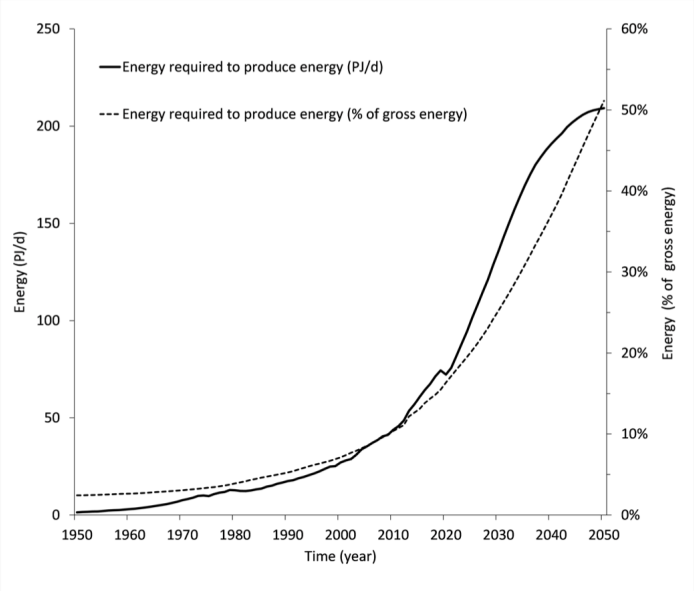



**Figure 3:** Evolution of energy required to produce oil liquids, from 1950 to 2050.

On considère aussi :

— $p$ - le prix de vente moyen sur le marché, par unité d'énergie (€/J). L'industrie du pétrole aura donc un chiffre d'affaires de $p * E_2$ (€).

— En même temps, l'industrie du pétrole aura des frais d'exploitation associés à la production d'énergie brute : plateformes, travailleurs, etc. Soit $c$ le coût

moyen par unité d'énergie produite (€/J). Le coût total de production est donc donnée par $c * E$ (€).

— le taux de marge $m$ sur les coûts de production est donnée par $m = \frac{p.E_2}{c.E}$

On a

$$p.E_2 = m.c.E$$

et donc

$$p = m.c.\frac{E_T}{E_2} = m.c.\frac{E}{E - E_1} = m.c.\frac{1}{(1 - \frac{E_1}{E})} = \frac{m.c}{(1 - \frac{1}{\tau})}$$

Le prix de vente par unité d'energie $p$ est donc une fonction de $m$, $c$ et de $\tau$.

Imaginons le scénario d'un épuisement lent des réserves de pétrole. Supposons que les coûts de production restent les mêmes (après tout, l'installation est déjà en place). Le scénario d'épuisement implique alors que nous devons consacrer toujours plus de la part $E_1$ pour continuer à faire tourner le système, puisque nous devons creuser plus. Supposons également que les producteurs de pétrole essaient de garder leur taux de marge $m$. Dans ce cas, le prix $p$ devient une fonction de $\tau$,

$$p = p(\tau)$$

Comme l'énergie est par définition une quantité positive, on s'interesse à étudier $p(\tau)$ sur le domaine $[0, +\infty[$. On constat que la fonction $p(\tau)$ n'est pas continue en $\tau = 1$. En effet

$$\lim_{\tau \to 0} P = \frac{m.c}{(1 - \underbrace{\frac{1}{\tau}}_{\to +\infty})} \to 0^-$$

$$\lim_{\tau \to 1^-} P = \underbrace{\frac{m.c}{(1 - \underbrace{\frac{1}{\tau}}_{\to 1^+})}}_{\to 0^-} \to -\infty$$

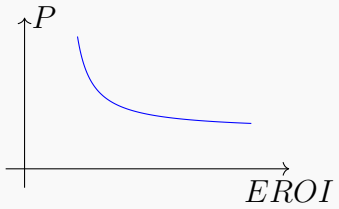
$$\lim_{\tau \to 1^-} P = \underbrace{\frac{m.c}{(1 - \underbrace{\frac{1}{\tau}}_{\to 1^-})}}_{\to 0^+} \to +\infty$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} P = \frac{m.c}{\underbrace{(1 - \underbrace{\frac{1}{\tau}}_{\to 0})}_{\to 1}} \to m.c$$

On peut aussi calculer la dérivée $P'$ pour $\tau \in ]1, +\infty[$ et regarder le tableau de variation de $p(\tau)$

$$P' = \frac{-mc}{(\tau - 1)^2} \quad \text{donc } P' < 0$$

Finalement, on obtient le graphe de $p$ en fonction de $\tau \in ]1, +\infty]$.

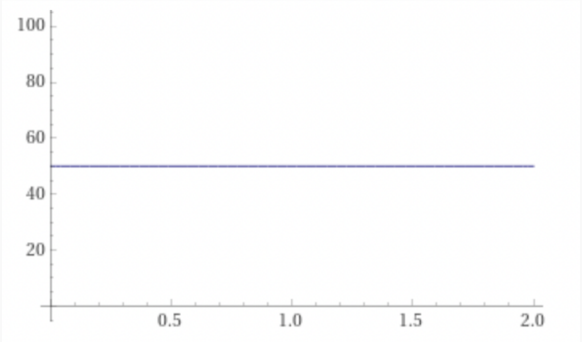



On peut donc conclure que même si le coût de production $c$ et le taux de marge $m$ restant constants, c'est possible, à cause de la diminution de l'EROI $\tau \to 1$, que le prix de vente explose très vite.

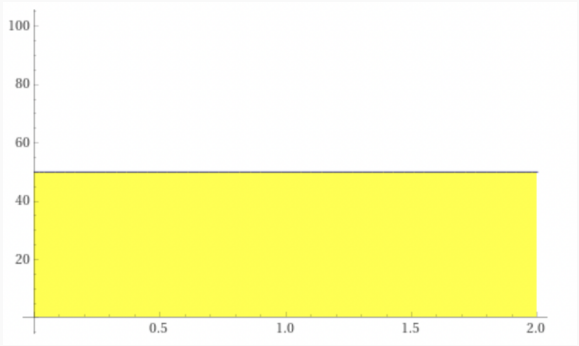
## 3.8. Séries, intégration et le pic du pétrole

**Exemple 3.8.1**

Considérons une voiture qui roule à une vitesse constante de 50km/h pendant une durée de 2 heures. La distance totale parcourue est donc de $50 * 2 = 100$ Km. Une autre façon de dire la même chose c'est de regarder le graphique de la vitesse en fonction du temps $v(t) = 50$ :




La distance totale parcourue peut alors être interprété comme la mesure de l'aire en dessous du graphe, c'est-à-dire le rectangle.




**Exemple 3.8.2**

On a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

**Exemple 3.8.3 Pic Pétrolier**

On reprendre ici la discussion dans Fait 2.2.5. La quantité de pétrole disponible sur la planète est gigantesque mais finie, disons, $Q$. Si on regarde le Fait 2.1.3 on peut dire que l'homme a commencé à utiliser les combustibles fossiles aux alentours du XIXe siècle. On pose donc l'année 1800 comme $t = 0$ et $C(t)$ la quantité de pétrole consommé par l'humanité par unité de temps au temps $t$. On suppose que $C(0) = 0$ et que $C(t)$ est continue.

1. Supposons que la quantité de pétrole utilisée par l'homme se stabilise dans le futur autour d'une certaine valeur. C'est à dire, que nous pouvons adopter une consommation soutenable d'une ressource finie non-renouvelable. Autrement dit, que la limite $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ existe.

   En utilisant le fait que la quantité disponible de pétrole est finie, on peut montrer que cette limite vaut $0$ pour une ressource finie. En effet, a quantité totale de pétrole utilisé entre 0 et T est donnée par l'intégrale

   $$\int_0^T C(t).dt$$

   et par hypothèse,

   $$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T C(t)dt = Q$$

   On raisonne par l'absurde : supposons que la limite $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ existe et vaut $L \neq 0$. Comme $C(t)$ est une fonction positive, alors $L \geq 0$. Donc on a $L > 0$. Alors par définition de limite (Définition 3.4.22), il existe $N \in [0, +\infty[$ tel que pour $t > N$, $C(t) > \frac{L}{2}$. On en déduit que $\int_N^t C(t)dt > (t - N) * \frac{L}{2}$.

C'est en contradiction avec

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T C(t).dt = Q$$

2. En utilisant que $\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0$ on montre que la fonction $C(t)$ admet un maximum absolue. On utilise le Théorème 3.6.5 : en effet, la fonction $C(t)$ est continue et non-nulle, donc il existe $a \in [0, +\infty[$ tel que $C(a) \neq 0$. Comme $\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0$, il existe un instant $a \geq 0$ tel que $\forall t > a$, $C(t) < C(a)$. Prenons donc l'intervalle fermée $[0, a]$. Ici, par le théorème des bornes atteintes, $C(t)$ admet un maximum absolue. Donc, $C(t)$ admet un maximum absolue sur $[0, +\infty[$.

La partie (ii) de l'Exemple 3.8.3 peut aussi être reformule de la façon suivante, avec la même démonstration :

**Proposition 3.8.4**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement positive, continue, avec $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$. Alors $f$ admet un maximum.

**Remarque 3.8.5**

Le fait que la quantité de pétrole soit finie ne suffit pas à garantir que la consommation atteindra un pic. Cela n'est vrai que si on suppose la consommation tendra vers zéro à long terme (l'hipothèse $\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0$). En effet, voici un exemple d'une fonction qui n'a pas de maximum global mais avec l'intégrale finie à l'infini.

En effet, prenons la série convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et prenons la fonction linéaire par morceaux dont le graphe est donnée par une suite de triangles d'aire $\frac{1}{n^2}$ :

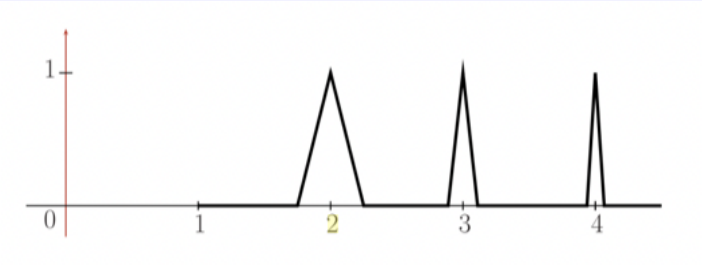



Image extraite de ce livre.

Alors l'intégral est donnée par $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

En fait, on peut même avoir une fonction de consommation croissante avec l'intégral $< \infty$ : prenons la série de l'Exemple 3.8.2, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Cette série converge vers $2$. Considérons donc la fonction dont le graphe est donnée par des triangles isocèles

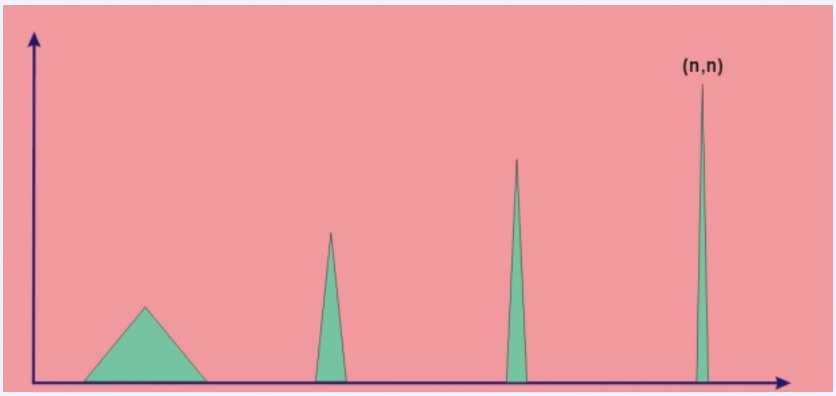



Image extraite de ce site.

dont l'aire de chaque triangle est $\frac{1}{2^n}$.

Les deux formes de consommation nécessitent des périodes de consommation nulle de plus en plus importantes et ne tiennent pas compte du fait que la production de pétrole ne peut pas être relancée avec des dérivés de plus en plus importantes comme la pente des triangles l'exige.

## 3.9. Exercices

**Exercice 3.9.1**

Soient $a$,$b$,$c$ trois nombres réels strictement positifs vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$abc > 1 \qquad a+b+c < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

En raisonnant par l'absurde, prouver chacune des trois propriétés suivantes :

1. Aucun des réels $a$, $b$, $c$ ne peut être égal à 1.
2. L'un au moins des réels $a$, $b$, $c$ est strictement supérieur à 1.
3. L'un au moins des réels $a$, $b$, $c$ est strictement inférieur à 1.

**Exercice 3.9.2**

Montrer que l'intervalle $[0,1[$ admet $1$ comme borne supérieure.

**Exercice 3.9.3**

Montrer que

— $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+3} < 2\} = ]-\infty, -7[ \cup ]-3, +\infty[$.
— $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+3} \geq 2\} = [-7, -3[$
— $\{x \in \mathbb{R} : |x+2| \leq 1\} = [-3, -1]$.
— $\{x \in \mathbb{R} : |3-x| > 2\} = ]-\infty, 1[ \cup ]5, +\infty[$.

**Exercice 3.9.4**

Montrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}] = \{1\}$$

**Exercice 3.9.5**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$. Montrer l'inegálité triangulaire : pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

**Exercice 3.9.6**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tel que pour tout $n \geq 1$, on a $|u_n - a| < \frac{1}{n}$. Montrer que la suite converge vers $a$.

**Exercice 3.9.7**

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes avec $u_n \to u$ et $v_n \to v$. Montrer que la suite donnée par la somme des termes $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u + v$.

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes avec $u_n \to u$ et $v_n \to v$. Montrer que la suite donnée par le produit $(u_n * v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u * v$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et majorée par $M \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq M$.

4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes avec $u_n \to u$ et $v_n \to v$. Montrer que si pour tout $n$ on a $u_n \leq v_n$ alors $u \leq v$.

5. (Gendarmes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles. Supposons que $u_n \to l$ et $v_n \to l$ convergent vers la même limite $l$ et supposons aussi que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq w_n \leq v_n$. Montrer que $w_n$ converge aussi vers $l$.

6. (Théorème des suites adjacentes)— Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites, avec $u_n$ croissante, $v_n$ décroissante et la limite $u_n - v_n$ converge vers $0$. Alors ces deux suites sont convergentes et ont la même limite.

7. Soient Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente avec $u_n \to u$ et $u_n \neq 0, \forall n$. Posons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $v_n = u_n^{-1}$. Montrer que $v_n \to \frac{1}{u}$.

**Exercice 3.9.8**

Calculer les cinq premiers itérations de la méthode de lExemple 3.2.2 pour calculer $\sqrt{10}$.

**Exercice 3.9.9**

Parmi les exemples suivants, indiquez ceux qui forment des fonctions continues et ceux qui n'en forment pas. Justifiez votre réponse.

— La masse d'une fusée spatiale lorsqu'elle quitte l'atmosphère.

**Exercice 3.9.10**

Est-ce que la somme de deux fonctions discontinues est nécessairement discontinue ?

**Exercice 3.9.11**

Est-ce que le produit de deux fonctions discontinues est nécessairement discontinue ?

**Exercice 3.9.12**

Soit $x > 0$. Montrer que $\lim_n \sqrt[n]{x} = 1$.

**Exercice 3.9.13**

Soient $f$ et $g$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Supposons que les deux limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ existent. Montrer que la limite $\lim_{x\to+\infty} g(x).f(x)$ existe et est égale à

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)f(x) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)\left(\lim_{x\to+\infty} g(x)\right)$$

**Exercice 3.9.14**

Un étudiant essaie de trouver un modèle quadratique pour la courbe des émissions (2ième graphique dans Fait 2.1.11). Il suppose une fonction de la forme $E = At^2 + Bt + C$ et prendre trois point sur le graphe : $(170, 40)$, $(100, 10)$ et $(10, 4)$.

1. Trouver les valeurs de $A$, $B$ e $C$.

2. Trouvez le minimum de la courbe, et évaluez l'adéquation de ce modèle aux données.

**Exercice 3.9.15**

Est-ce que la preuve suivante est correcte ? Si non, où est l'erreur ?

Énoncé : Toute fonction continue bornée à valeurs réelles $f$ définie sur $\mathbb{R}$, atteint son maximum.

Preuve : Soit $M = sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Soit $x_n$ une suite convergente de limite $x$ tel que $f(x_n) \to M$. Comme $f$ est continue, $f(x_n) \to f(x)$, donc $f(x) = M$. Donc $f$ atteint son maximum en $x$.

4

# Exponentielle et Logarithme

« **"The greatest shortcoming of the human race is our inability to understand the exponential function."** »

Albert Allen Bartlett

## 4.1. Ordres de grandeur

Nos expériences de la vie quotidienne sont concentrées dans un intervalle très étroit des différentes échelles de l'univers. La Science nous met face à d'autres échelles tels que $10^{28}$ et $10^{-15}$, dont la compréhension nécessite d'aller au-delà de notre intuition quotidienne.

**Définition 4.1.1**

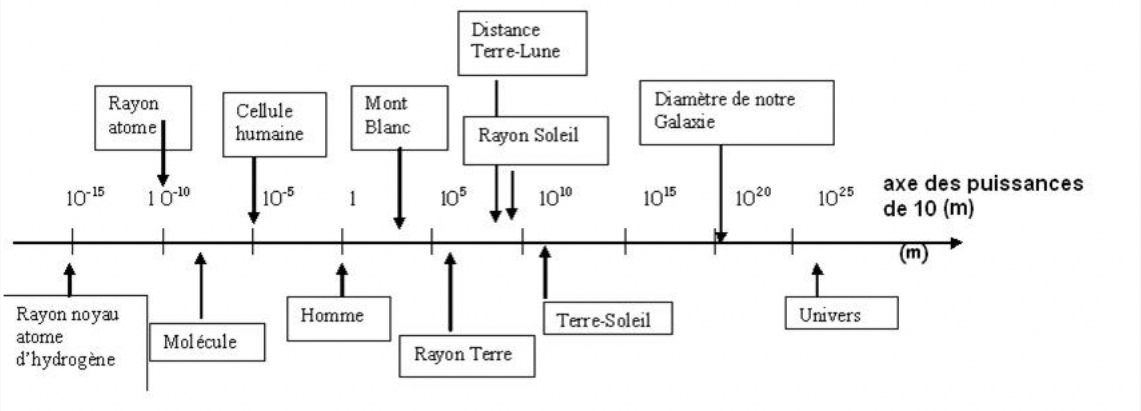
Soit $n$ un nombre naturel. On pose

$$10^n = \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n \text{ fois}}$$

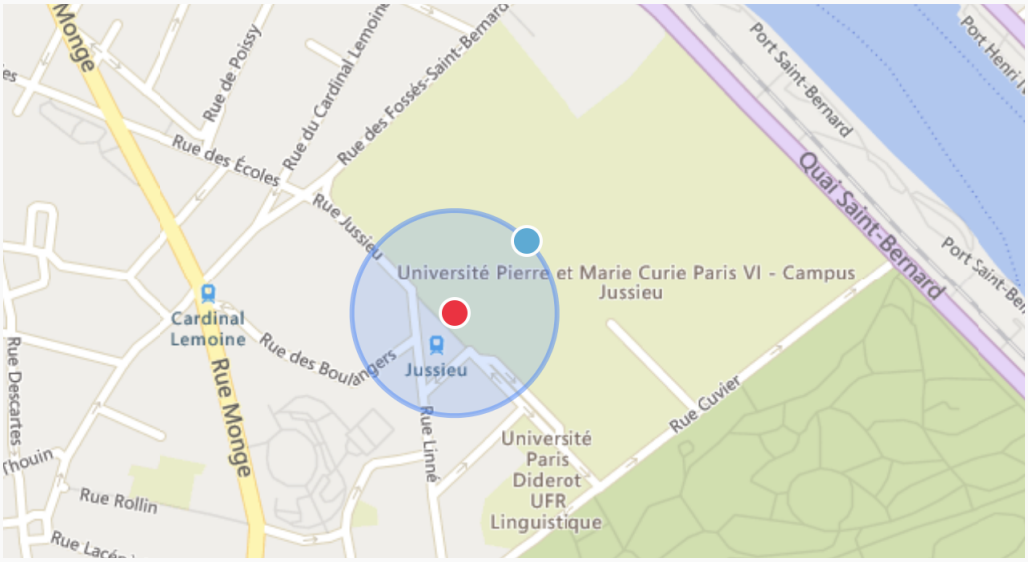
$$10^{-n} = \underbrace{\frac{1}{10} * \frac{1}{10} * \frac{1}{10} * ... * \frac{1}{10}}_{n \text{ fois}}$$

On appelle *ordre de grandeur* l'entier $n$ dans l'exposant de $10^n$.

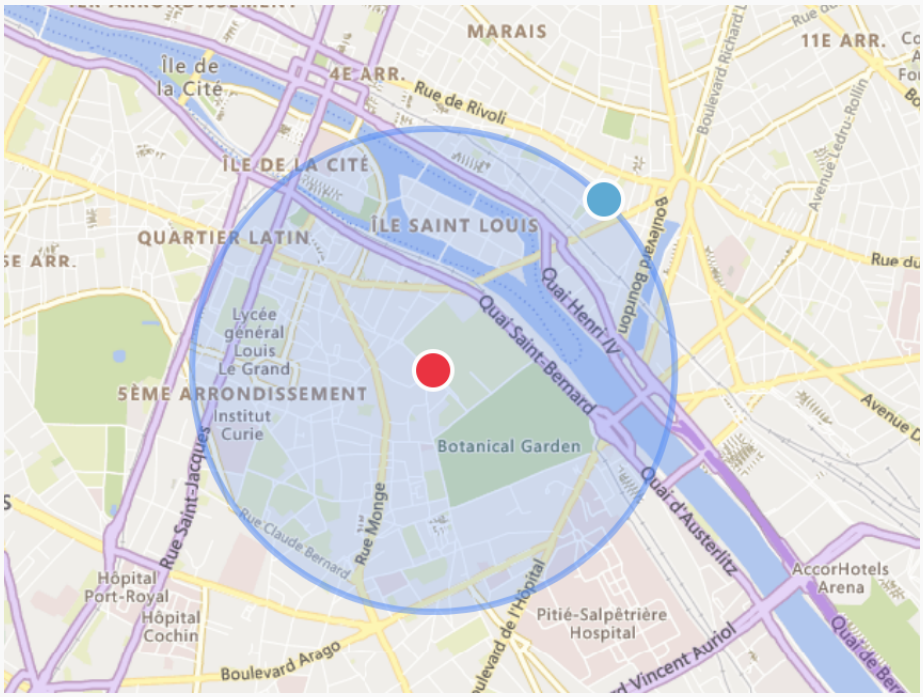
**Exemple 4.1.2**



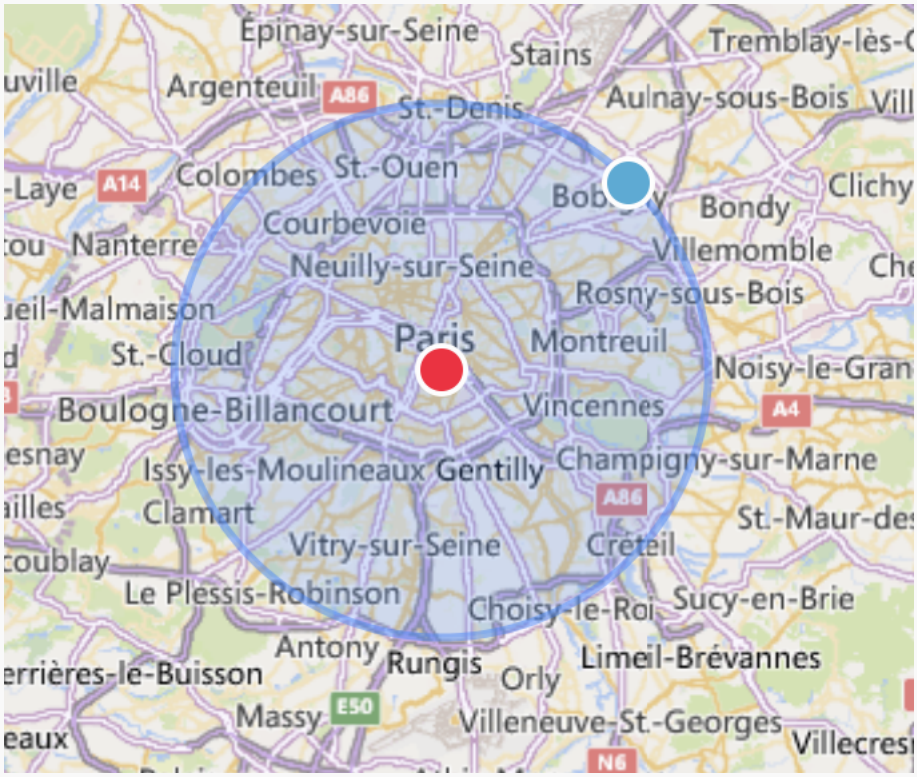

— $10^2$ m


Monge
Rue de Poissy
Rue du Cardinal Lemoine
Rue des Fossés-Saint-Bernard
Rue des Écoles
Rue Jussieu
Port Saint-Bernard
Quai Saint-Bernard
Université Pierre et Marie Curie Paris VI - Campus Jussieu
Cardinal Lemoine
Rue des Boulangers
Jussieu
Rue Monge
Rue Descartes
Rue Curvier
Rue Linné
Université Paris Diderot UFR Linguistique
Rue Rollin

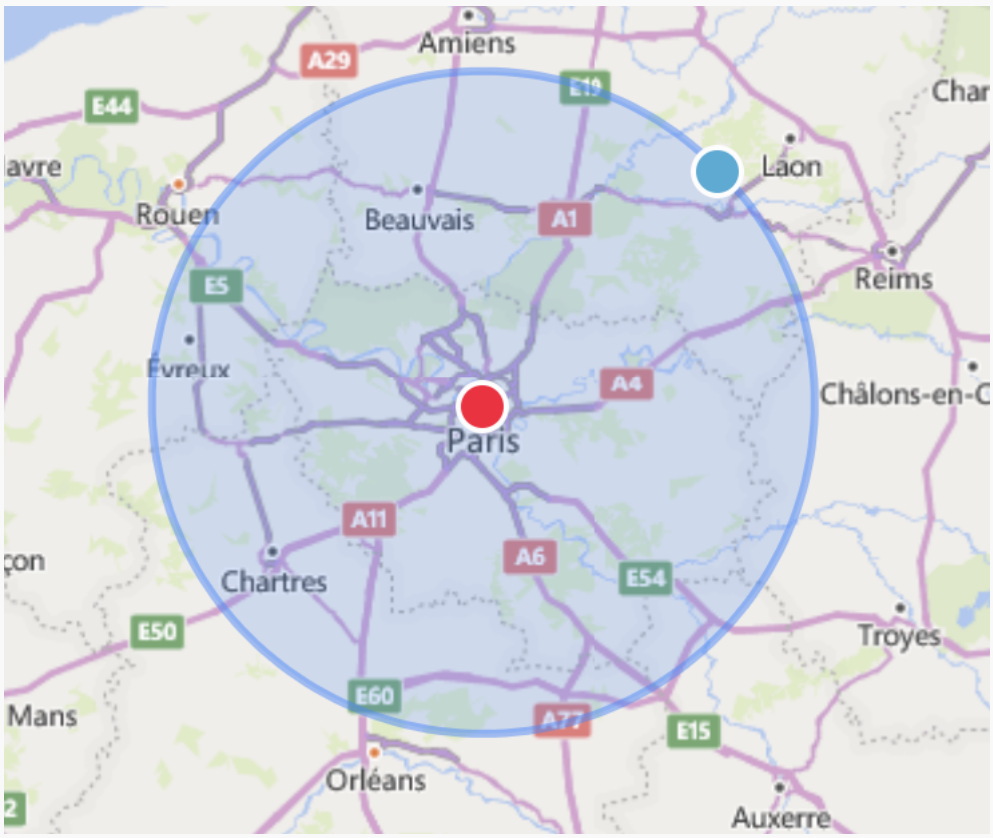
— $10^3$ m


MARAIS
11E ARR.
Île de la Cité
4E ARR.
Rue de Rivoli
ÎLE DE LA CITÉ
ÎLE SAINT LOUIS
QUARTIER LATIN
Boulevard Richard
Avenue Ledru-Rollin
Boulevard Bourdon
Quai Henri IV
Quai Saint-Bernard
Lycée général Louis Le Grand
5ÈME ARRONDISSEMENT
Institut Curie
Botanical Garden
Rue Saint-Jacques
Rue Claude Bernard
Rue Monge
Quai d'Austerlitz
AccorHotels Arena
Hôpital Port-Royal
Hôpital Cochin
Pitié-Salpêtrière Hospital
Boulevard Arago
Avenue

— $10^4$ m


Épinay-sur-Seine
Stains
Tremblay-lès-
Argenteuil
A86
St.-Denis
Aulnay-sous-Bois
A14
Colombes
St.-Ouen
Clichy
Courbevoie
Bondy
Nanterre
Villemomble
Neuilly-sur-Seine
Rosny-sous-Bois
Paris
Montreuil
St.-Cloud
Noisy-le-Gran
Boulogne-Billancourt
Vincennes
A4
Issy-les-Moulineaux
Gentilly
Champigny-sur-Marne
Clamart
A86
St.-Maur-des
Vitry-sur-Seine
Créteil
Le Plessis-Robinson
Choisy-le-Roi
Sucy-en-Brie
Antony
Rungis
Orly
Limeil-Brévannes
Massy
E50
Villeneuve-St.-Georges
N6

— $10^5$ m


Amiens
A29
E44
Laon
Rouen
Beauvais
A1
E5
Reims
Paris
A4
A11
A6
E54
Chartres
E50
Troyes
E60
A77
E15
Orléans
Auxerre

— $10^6$ m :

  - Le rayon de la Terre est d'environ $6 \times 10^6$ m.
  - Le rayon de la Lune est d'environ $1.7 \times 10^6$ m, environ 3,5 fois plus petit que le rayon de la Terre.

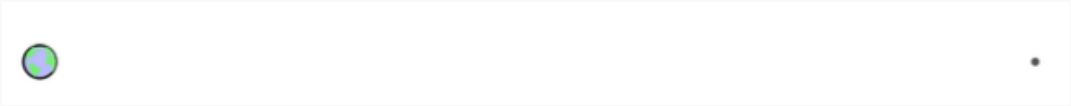
— $10^7$ m : Périmètre de la terre (en m) (voir Théorème 1.1.10)

— $10^8$ m :

  - La distance Terre-Lune $3.8 \times 10^8$ m
  - Le rayon du soleil $7 \times 10^8$ m, presque $10^9$.

— $10^{11}$ m : Distance (en m) Terre-Soleil.

La distance Terre-Lune ($10^8$ m) est supérieure en $2$ ordres de grandeur (100 fois) aux tailles respectives de la Terre et de la Lune. Si nous respectons les échelles, voici à quoi ça ressemble en réalité :



La distance Terre-Soleil ($10^11$ m) dépasse en $2$ ordres de grandeur (100 fois) le rayon du soleil ($\sim 10^9$ m), lui même environ 3 ordres de grandeur (1000 fois) supérieur au rayon de la Terre :

Nous pouvons essayer de relier les ordres de grandeur des phénomènes que nous connaissons dans la vie quotidienne :

**Quizz 4.1.3**

Imaginons un modèle de la Terre de la taille de votre main. En conservant l'échelle réelle, à quelle distance de vous se trouverait la Lune ? et le Soleil ? Mars ? La frontière du système solaire ?

**Exemple 4.1.4**

— $10^{-9}$ : les chances de gagner le jackpot de l'Euromillions.

— $10$ : Il y a $10$ doigts dans une paire de mains humaines.

— $10^4$ :On estime que chaque neurone du cerveau humain est connecté à $10000$ autres.

— $10^5$ :
  — On connaît environ 390 000 espèces végétales distinctes, dont environ $20\%$ sont menacées d'extinction.
  — Une tête humaine moyenne compte environ 100 000 à 150 000 cheveux.

— $10^6$ :Environ 1 181 019 jeux vidéo ont été créés jusqu'en 2019.

— $10^7$ :
  — 70 à 85 millions de victimes estimées à la suite de la Seconde Guerre mondiale.
  — nombre de secondes sur une année.

— $10^9$ :
  — Nombre d' étoiles cataloguées.
  — La population approximative de l'Inde en 2020.

— $10^{12}$ :
  — La surface du corps humain héberge environ $10^{12}$ bactéries.
  — Selon une estimation de 2016, il y a 2 × $10^{12}$ galaxies dans l'univers observable.

— $10^{19}$ :
  — On estime que la population d'insectes de la Terre est d'environ $10^{19}$.
  — Nombre de différentes positions d'un Cube de Rubik $3 \times 3 \times 3$.

**Exemple 4.1.5**

Combien de grains de riz contiennent un sachet de 2 kilos de riz ? Sachant que chaque grain de riz a environ $0,02g = 0,02 \times 10^{-3}\, Kg$ , par proportionnalité, dans $1Kg$ de riz on a environ

$$\frac{1}{0,02 \times 10^{-3}} = 50 \times 10^3 = 5 \times 10^4 = 50000$$

grains de riz. Donc, dans $2K$g de riz on a environ $2 \times 50000 = 100000 = 10^5$ grains de riz.

**Définition 4.1.6**

Tout au long de ce texte, nous parlerons de l'énergie à plusieurs reprises. L'unité standard pour l'energie c'est le Joule. Par definition 1 Joule c'est l'énergie necessarie pour appliquer une force de 1 Newton le long d'une distance de $1$ mètre. Rappelons nous de la formule de Newton, où $F = ma$, donc 1 Newton = $Kg.\frac{m}{s^2}$, dù,

$$1J = 1Kg.\frac{m^2}{s^2}$$

.
La vitesse à laquelle nous accédons à l'énergie (*la puissance*) a également une unité, le Watt.

$$1W = 1\,J/s$$

Par exemple, la différence entre une lampe de 30 W et une autre de 45 W est que la deuxième permet un plus grand flux d'énergie par seconde. Par conséquent, après une heure, elle aura consommé globalement plus d'énergie. Parfois, au lieu de Joules, on utilise comme unité d'energie la quantité d'énergie consommée par une source d'une puissance de 1KW (1000 W) pendant une heure ($60 \times 60 = 3600$ s)

$$1\,KWh = 3600000\,J = 3.6 \times 10^6 J$$

**Exemple 4.1.7**

Voici un tableau comparant quelques différentes échelles d'énergie.

- $10^{-33}$ J : l'énergie cinétique moyenne d'une molécule à la température la plus basse atteinte
- $10^{-17}$ J : énergie des photons de la lumière visible.
- $10^{-12}$ J : l'énergie totale émise dans la fission d'un noyau de Uranium 235.
- $1$ J : l'énergie requise pour soulever une petite pomme (102 g) d'un mètre, à la surface de la Terre.
- $10$ J : énergie émise par le flash d'un appareil photo.
- $10^3$ J :
  - l'énergie nécessaire à un enfant (30 kg) pour monter un étage (un peu plus de trois mètres).
  - l'énergie reçue du Soleil, au sommet de l'atmosphère terrestre, par un mètre carré en une seconde.
- $10^4$ J : énergie dégagée par le métabolisme d'un gramme de sucre ou de protéine.
- $10^5$ J : énergie mécanique produite pendant une heure, par un cycliste à une vitesse approximative de 25 km/h.
- $10^6$ J :
  - la valeur énergétique d'une barre de 40 g de Chocolat noir amer.
  - $2 \times 10^6$ joules c'est l'équivalent énergétique d'un Big Mac.
  - $1$ KWh =travail mécanique pour élever 100 kg de 3 600 mètres.

  - énergie dépensée par le corps humain en une journée.

- $10^7$ J :
  - 44 jours d'éclairage, 24/24h (une lampe de 11 W allumée pendant 1 054 heures)
  - énergie contenue dans 1 litre de essence.
  - énergie résultat du travail physique de deux personnes pendant une journée de travail complète

- $10^9$ J :
  - l'énergie d'un éclair moyen.
  - l'énergie contenue dans un réservoir moyen (50 litres) d'essence.
  - l'énergie consommée par un Congolais par an.
  - l'énérgie consommé par un Français par jour.
  - 1000 Big macs.

- $10^{10}$ J : l'énergie consommée par un Indien par an.
- $10^{11}$ J : l'énergie consommée par un Français par an.
- $10^{12}$ J : l'énergie dégagée par l'explosion d'une kilotonne de TNT.
- $10^{13}$ J : l'énergie dégagée par le bombardement d'Hiroshima.
- $10^{15}$ J : 1 TWh
- $10^{16}$ J : l'énergie de formation d'un cratère d'impact correspondant à une météorite de dix mille tonnes.
- $10^{17}$ J :
  - l'énergie totale du Soleil qui atteint la Terre en une seconde.
  - l'énergie dégagée par la plus puissante bombe nucléaire jamais testée, la bombe Tsar.
  - énergie consommée par l'Argentine au cours d'une année.
  - énergie consommée par le réseau Bitcoin au cours d'une année.
  - l'énergie dégagée par l'eruption du volcan Tonga en janvier 2022.

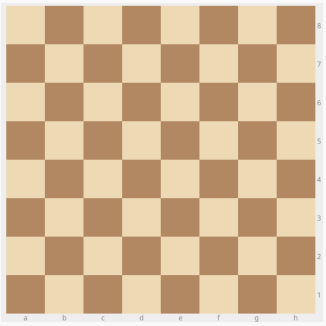
- $10^{19}$ J : l'équivalent énergétique de l'alimentation annuelle d'une population mondiale de 7 milliards d'êtres humains sur la base d'un apport nutritionnel journalier de 1 500 kcal.
- $10^{20}$J : Consommation mondial d'energie primaire en 2019 (voir Fait 2.1.3 - environ 160 000 TWh )

**Exemple 4.1.8 - Ordres de grandeur - mine de cuivre**

Mine de cuivre de Palabora, Afrique du Sud ; à gauche : représentation imagée de la quantité de cuivre métal produite par la mine jusqu'à environ 2007 (© Dillon Marsh · Mise à disposition par le photographe · dillonmarsh.com) : à droite : Vue satellitaire de la mine et mise en évidence de l'emprise en surface des déchets miniers (© Google 2021) | Création : SystExt · Septembre 2021

**Exemple 4.1.9**

Considérons un échiquier



Jouons le jeu suivant. Dans la première case en haut à gauche, nous plaçons un grain de riz. Dans la deuxième à sa droite nous plaçons 2 grains de riz. Nous continuons sur chaque nouvelle case en mettant deux fois la quantité que nous avons ajoutée dans la case précédente. Lorsque nous avons terminé la première ligne, nous passons à la deuxième ligne, etc. jusqu'à la fin.

Combien de riz nous restera à la fin, si nous partons avec un paquet de 2 kg ? Nous avons déjà vu dans l'Exemple 4.1.5 que 2 kgs de riz contiennent environ $10^5$ grains de riz. Pour résoudre le problème, nous devons estimer la quantité de riz nécessaire pour terminer le jeu. Dans la prémière case, on ajoute $1$ grain de riz. Dans la deuxième, $2$, dans la troisieme $2 \times 2 = 2^2$, dans la quatrième,

$2 \times (2 \times 2) = 2^3$, etc. On compte $8 \times 8 = 64$ cases, donc, la quantité totale de grains de riz nécessaire pour terminer le jeu est donnée par la somme

$$\underset{1^\circ \text{ case}}{1} + \underset{2^\circ \text{ case}}{2} + \underset{3^\circ \text{ case}}{2^2} + ... + \underset{64^\circ \text{ case}}{2^{63}}$$

En utilisent l'Exercice 1.4.8, on a

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{63} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \sim 2^{64}$$

Il faut maintenant comparer $2^{64}$ avec $10^5$. Pour cela, nous calculons les premières puissances de $2$ :

$$2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,\ 2^7 = 128,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 512,$$

$$2^{10} = 1024 \sim 10^3$$

Donc

$$2^{10k} \sim 10^{3k}$$

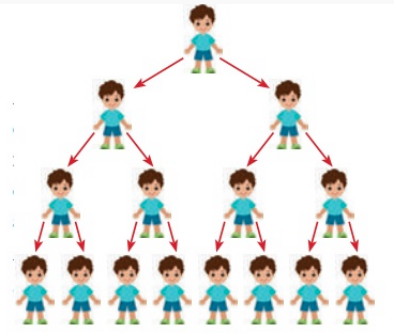
Donc en particulière, $2^{60} \sim 10^{18}$ et finalement $2^{64} = 2^4 \times 2^{60} = 16 \times 10^{18} \sim 1.6 \times 10^{19}$. C'est $19 - 5 = 14$ ordres de grandeur au-dessus de la quantité de riz dans un paquet de 2 kilos. Par proportionnalité directe, $10^{19}$ correspond à $\frac{2 \times 10^{19}}{10^5} = 2 \times 10^{14}$ kilos de riz = $10^{11}$ tonnes = $10^8 kt$ = $10^5 Mt$. Selon les dernières prévisions la production mondiale de riz devrait croître pour la sixième année consécutive en 2021/22, à un nouveau pic de 512 Mt. On aurait besoin de 2 siècles de production mondiale de riz 2021/2022 pour finir le jeu.

**Exemple 4.1.10**

Pliez 42 fois une feuille de papier et vous obtenez une épaisseur égale à la distance Terre-Lune :

**Exemple 4.1.11**

Considérons une nouvelle maladie. La première personne est infecté le premier janvier. Le deuxième jour de janvier, le premier malade infecte deux autres personnes. Le 3 janvier, chacune de ces deux personnes infecte deux nouvelles personnes. Ensuite, chaque nouveau jour, chaque personne infectée infecte deux nouveaux patients.



Combien de personnes sont infectées par la maladie le 31 janvier ?

Comme dans l'Exemple 4.1.9, on calcule

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{1 \text{ janvier}} + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{31-1}}_{2 \text{ janvier}} = 2^{31} - 1}_{3 \text{ janvier}} \sim 2^{31} = 2 \times 2^{30} = 2 \times 2^{10*3} \sim 2 \times 10^9}_{31 \text{ janvier}}$$

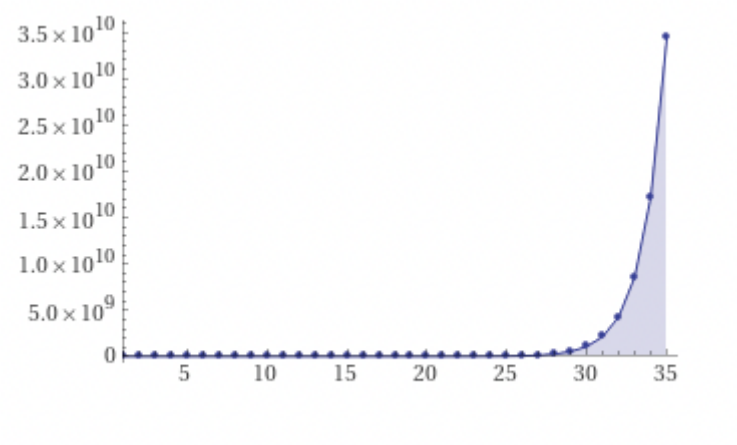
C'est à dire, environ 2 milliards de personnes. C'est environ 1.4 fois la population de la Chine.

**Exemple 4.1.12**

Reprenons l'Exemple 4.1.11 et trouvons une formule pour le nombre $Q(n)$ de personnes infectées $n$ jours après le premier janvier. On a :

$$Q(n) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{1 \text{ janvier}} + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}}_{2 \text{ janvier}} = 2^n - 1}_{3 \text{ janvier}}}_{n \text{ jours}}$$

Voici donc le graphe de cette fonction définie sur les nombres naturels positifs :




Voici un lien pour continuer à explorer la forme du graphe pour des $n$ plus grands. Pendant les 25 premiers jours, on a l'impression que rien ne se passe, puis le 29e jour, le comportement semble exploser. Cependant, rien ne change dans le mécanisme de croissance. C'est un comportement typique de ce qui se passe lorsque c'est l'ordre de grandeur qui croît.

**Exemple 4.1.13 Croissance Linéaire**

On reprendre ici l'Exemple 4.1.9 avec un petit changement des règles du jeu. Plutôt que doubler la quantité à chaque étape, nous demandons que pour chaque nouvelle case on ajoute simplement la même quantité de l'étape précédente plus deux grains de plus. Voici le résultat :

$$\underset{1^\circ \text{ case}}{1} + \underset{2^\circ \text{ case}}{(1+2)} + \underset{3^\circ \text{ case}}{((1+2)+2)} + \ldots + \underset{64^\circ \text{ case}}{(1+(64-1)*2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{63}(1+2n) = \sum_{n=0}^{63} 1 + 2\sum_{n=0}^{63} n = 64 + 2 * \frac{63(64)}{2} = 64 + 63 * 64 = 64 * 64 = 4096$$

grains de riz (voir la formule dans l'Exemple 1.3.8). Environ 16 ordres de grandeur en dessous du résultat de l'Exemple 4.1.9.

Les exemples Exemple 4.1.5 et Exemple 4.1.11 sont caractérisés par le fait de doubler la quantité précédente à chaque nouvelle itération. Nous pouvons facilement imaginer des exemples concrets où, à chaque nouvelle itération, nous avons un facteur multiplicatif de $a \in \mathbb{R}$ fois la quantité préexistante, avec $a > 0$.

**Exemple 4.1.14**

Une personne souhaite placer 2500 euros dans un compte épargne avec un taux d'intérêt annuel de $1\%$. Quel sera le bénéfice après 10 ans ?

Au bout d'un an, la personne aura

$$2500 + 1\% \text{ de } 2500 = 2500 + 0.01 \times 2500 = 2500 \times (1 + 0.01) = 2500 \times (1.01)$$

Soit $Q(n)$ le montant après $n$ années. Alors, par le même argument

$$Q(n+1) = Q(n)+1\% \text{ de } Q(n) = Q(n)+0.01\times Q(n) = Q(n)(1+0,01) = Q(n)\times(1.01)$$

Posons $a = 1.01$. Par récurrence :

$$Q(n) = Q(0) * a^n$$

où on pose

$$a^n = \underbrace{a * a * a * ... * a}_{n \text{ fois}}$$

En faisant les calculs, on obtient

$$Q(10) = 2500 * (1,01)^{10} = 2761,5 \text{ euros}$$

Donc un bénéfice de 261.5 euros.

**Remarque 4.1.15**

L'exemple précédent montre l'importance de considérer des itérations par un facteur multiplicatif $a > 0$ avec $a \in \mathbb{R}$. Mais il montre également l'importance de ne pas considérer uniquement les itérations en temps discret. Par exemple, nous pouvons être intéressés à savoir précisément combien d'argent nous aurons à l'instant $t = \sqrt{2}$ secondes.

**Problème 4.1.16**

Fixons $a \in ]0, +\infty[$. D'après la Remarque 4.1.15 nous sommes obligés de donner un sens mathématique aux nombres $a^s$ pour $s \in \mathbb{R}$. Quelque soit la manière que nous trouvons pour montrer que ces nombres existent, ils doivent vérifier certaines formules "évidentes", notamment :

1. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $a^n = \underbrace{a * a * a * ... * a}_{n \text{ fois}}$. En particulier, $a^1 = r$ et $a^0 = 1$.
2. Si $s = -1$ alors $a^s = \frac{1}{a}$.
3. $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$, $a^{s+t} = a^s * a^t$ ;
4. $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$, $(a^s)^t = a^{s.t}$

La résolution de ce problème est le propos de la prochaine section.

## 4.2. Construction de la fonction exponentielle

Nous abordons ici la solution du Problème 4.1.16.

**Remarque 4.2.1**

Nous ne connaissons toujours pas, par exemple, la définition du symbole $10^{\sqrt{2}}$ mais si nous voulons que ça soit un nombre, alors, par exemple, comme $1 < \sqrt{2} < 2$, nous souhaitons que $10^1 = 10 < 10^{\sqrt{2}} < 100 = 10^2$. La stratégie pour définir $10^{\sqrt{2}}$ consiste donc à réduire cette intervalle autant que possible en remplaçant $1$ par des nombres rationnels $\frac{n}{m}$ inférieurs à $\sqrt{2}$ mais très proches de $\sqrt{2}$ et $2$ par des nombres rationnels $\frac{p}{q}$ supérieurs à $\sqrt{2}$ mais aussi très proches de $\sqrt{2}$ et à trouver des bornes

$$\longrightarrow \frac{n}{m} \longrightarrow \underset{\sqrt{2}}{\bullet} \longleftarrow \frac{p}{q} \longleftarrow$$

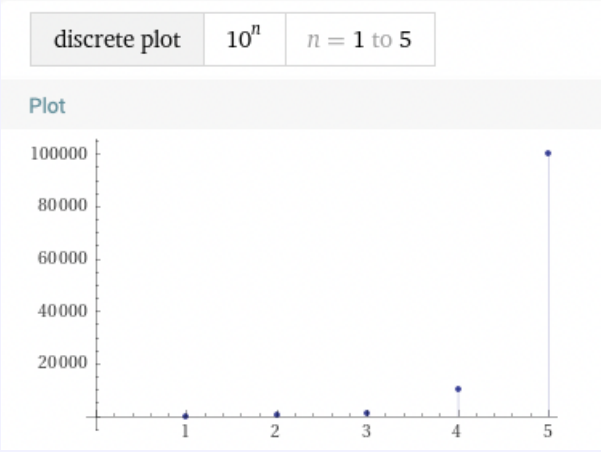
$$\downarrow$$

$$\longrightarrow 10^{\frac{n}{m}} \longrightarrow \underset{10^{\sqrt{2}}}{\bullet} \longleftarrow 10^{\frac{p}{q}} \longleftarrow$$

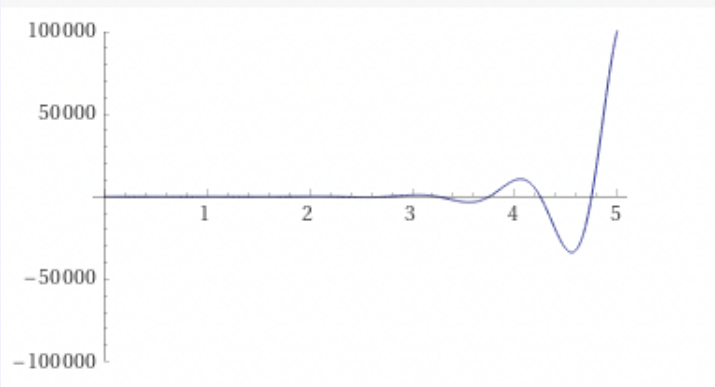
Le premier problème est donc la définition des nombres $a^s$ pour $s$ un nombre rationnel.

**Remarque 4.2.2**

Un autre façon d'expliquer la Remarque 4.2.1 c'est de dire que nous essayons de remplir les trous




mais pas de façon aléatoire : on cherche à garder les propriétés des exposantes énoncés dans le Problème 4.1.16. Par exemple




n'est pas souhaité, car $10^{4.5} < 0$ et donc $10^{4.5} \neq 10^4.10^{0.5} > 0$.

Nous commençons par vérifier que le nombre $a^s$ est effectivement bien défini lorsque $s$ est un nombre entier.

**Construction 4.2.3**

Fixons $a$ un nombre réel strictement positif et soit $n$ un nombre naturel. On pose

$$a^n \underset{\text{définition}}{=} \underbrace{a * a * a * ... * a}_{n \text{ fois}} \tag{4.1}$$

Grâce à la propriété de commutativité et associativité de la multiplication des nombres réels, il n'y a aucune ambiguïté : on peut calculer ce produit dans n'importe quel ordre.

Comme $a$ est strictement positif, $\frac{1}{a}$ est aussi strictement positif. Toujours pour $n$ un nombre naturel, on pose

$$a^{-n} \underset{\text{définition}}{=} \underbrace{\frac{1}{a} * \frac{1}{a} * \frac{1}{a} * ... * \frac{1}{a}}_{n \text{ fois}} \tag{4.2}$$

et pour la même raison que ci-dessus, il n'y a aucune ambiguïté dans cette formule.

On pose la fonction

$$f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+^*$$

donnée par la formule $f_a(n) = a^n$.

**Lemme 4.2.4**

La fonction $f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+^*$ de la Construction 4.2.3 vérifie toutes les formules dans le Problème 4.1.16.

*Démonstration.*

— Les formules (i) et (ii) découlent de (4.1) et (4.2) ;

— Vérifions la formule (iii) pour $s = n$, $t = m$ dans $\mathbb{Z}$. Si $n, m$ sont des nombres entiers, alors

$$a^{n+m} = a^n * a^m$$

En effet, si $n$ et $m$ sont tous les deux des entiers positifs, on a

$$a^{n+m} \underset{\text{définition}}{=} \underbrace{a * a * a * \ldots * a}_{n+m \text{ fois}} = \underbrace{a * a * a * \ldots * a}_{n \text{ fois}} * \underbrace{a * a * a * \ldots * a}_{m \text{ fois}} = a^n * a^m$$

Si $n$ et $m$ sont tous les deux des negatifs, on a

$$a^{n+m} \underset{\text{définition}}{=} \underbrace{\frac{1}{a} * \frac{1}{a} * \ldots * \frac{1}{a}}_{n+m \text{ fois}} = \underbrace{a * \frac{1}{a} * \ldots * \frac{1}{a}}_{n \text{ fois}} * \underbrace{\frac{1}{a} * \frac{1}{a} * \ldots * \frac{1}{a}}_{m \text{ fois}} = a^n * a^m$$

Si $n$ est positif et $m$ est négatif on a

$$a^n * a^m = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n \text{ fois}} * \underbrace{\frac{1}{a} * \frac{1}{a} * \ldots * \frac{1}{a}}_{|m| \text{ fois}}$$

$$\begin{cases} a^{n-|m|} = a^{n+m}, & \text{si } n > |m| \\ 1 = a^{n+m}, & \text{si } n = |m| \\ (\frac{1}{a})^{|m|-n} = a^{n+m}, & \text{si } n < |m| \end{cases}$$

— Vérifions la formule (iv) : Si $n$, $m$ sont positifs

$$(a^n)^m = \underbrace{(\underbrace{a * \ldots * a}_{n \text{ fois}} * \ldots * \underbrace{a * \ldots * a}_{n \text{ fois}})}_{m \text{ fois}} = \underbrace{a * \ldots * a}_{nm \text{ fois}} = a^{nm}$$

De même, la formule est valable si $n$ et $m$ sont tous les deux négatifs, en remplaçant $a$ par $1/a$.

Finalement pour $n$ un naturel positif on a $a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$. Donc, si $n$ est positif et $m$ est négatif on a

$$(a^n)^m = (a^n)^{-|m|} = ((a^n)^{-1})^m = ((a^{-1})^n)^{|m|} = (a^{-1})^{n.|m|} = a^{-n.|m|} = a^{n.m}$$

□

**Remarque 4.2.5**

La fonction $f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+^*$ de la Construction 4.2.3 peut être croissante ou décroissante selon la valeur de $a$. En effet :

— si $a = 1$ la fonction est constant $= 1$ car $1^n = 1$ pour tout $n$ entier.

— Si $0 < a < 1$ alors $a^2 = a.a < a.1 = a$. Par récurrence on montre que pour chaque $m \geq n$ des entiers positifs, on a $a^m = f_a(m) \leq a^n = f_a(n)$. Comme $a < 1$ on a $1 < \frac{1}{a}$ et donc $a^{-1} > 1$. On voit aussi que $1.\frac{1}{a} < \frac{1}{a}.\frac{1}{a}$ et donc $a^{-2} > a^{-1}$ Par récurrence on montrer que

$$a^0 < a^{-1} < a^{-2} < a^{-3}...$$

Donc la fonction $f_a$ est strictement décroissante.

— Un argument symétrique (en remplaçant $a$ par $\frac{1}{a}$) montre que si $a > 1$, alors $f_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{Z}$.

Nous allons maintenant montrer que nous pouvons aussi définir $a^s$ lorsque $s$ est un nombre rationnel.

**Construction 4.2.6**

Toujours avec $a$ un réel strictement positif et $n$ un nombre naturel, nous abordons maintenant le problème de la définition de $a^{\frac{1}{n}}$. Si nous voulons que la propriété soit vraie Problème 4.1.16-(iv) nous n'avons pas beaucoup de choix :

$$a = a^1 = a^{\frac{n}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^n$$

Donc $a^{\frac{1}{n}}$ est une racine $n$-ième de $a$. Mais nous avons vu dans Corollaire 3.5.2 comme consequence du théorème des valeurs intermédiaires (Théorème 3.4.25) que si $a$ est un nombre réel positif, la racine $n$-ième de $a$ existe, et strictement positif, et est unique. On pose donc

$$a^{\frac{1}{n}} \underset{\text{définition}}{=} \text{la racine } n\text{-ième de } a$$

Considérons maintenant $n$, $m$ des nombres naturels. On veut définir $a^{\frac{n}{m}}$. À priori on a deux possibilités :

$$a^{\frac{n}{m}} \underset{\text{définition 1}}{=} (a^{\frac{1}{m}})^n$$

ou

$$a^{\frac{n}{m}} \underset{\text{définition 2}}{=} (a^n)^{\frac{1}{m}}$$

Mais en fait, ces deux définitions coïncident grâce à l'unicité des racines $m$-ièmes positives (Corollaire 3.5.2) : en effet

$$((a^{\frac{1}{m}})^n)^m = (a^{\frac{1}{m}})^{n.m}$$

car $n$ et $m$ sont des nombres naturels et pour des exposants naturels la formule a été prouvée dans la Construction 4.2.3. Le même argument permet de faire

$$(a^{\frac{1}{m}})^{n.m} = (a^{\frac{1}{m}})^{m.n} = ((a^{\frac{1}{m}})^m)^n = a^n$$

De la même façon

$$((a^n)^{\frac{1}{m}})^m = a^n$$

Il n'y a donc pas d'ambiguïté car $(a^{\frac{1}{m}})^n$ et $((a^n)^{\frac{1}{m}})^m$ sont des racines $m$-ièmes de $a^n$ et donc identiques grâce à l'unicité des racines $m$-ièmes positives (Corollaire 3.5.2). Nous pouvons donc définir $a^{\frac{n}{m}}$ soit par la première formule, soit par la deuxième.

Il reste donc à démontrer par exemple que $a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{4}}$, c'est-à-dire, étant données $n, m, p, q$ des nombres naturels avec $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$. Alors

$$a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{p}{q}} \tag{4.3}$$

Prenons chaque côté à la puissance $mq$. On obtient :

$$(a^{\frac{n}{m}})^{mq} = (((a^n)^{\frac{1}{m}})^m)^q = (a^n)^q = a^{nq}$$

$$(a^{\frac{p}{q}})^{mq} = (((a^p)^{\frac{1}{q}})^q)^m = (a^p)^m = a^{pm}$$

Comme $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$, on a $nq = mp$ et donc

$$a^{nq} = a^{pm}$$

Par unicité de la racine $mq$-ième positive, on déduit l'égalité (4.3).

En conclusion, nous avons prolongé la fonction $f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+^*$ de la Construction 4.2.3, à tous les nombres rationnels,

$$f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+^*$$

.

**Lemme 4.2.7**

La fonction $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+^*$ de la Construction 4.2.6 vérifie les formules (i), (ii), (iii) et (iv) du Problème 4.1.16 pour $s, t \in \mathbb{Q}$.

*Démonstration.* On démontre les formules (iii) et (iv). Prenons $s, t \in \mathbb{Q}$ avec

$s = \frac{n}{m}$ et $t = \frac{p}{q}$. Par réduction au même dénominateur

$$s + t = \frac{nq + pm}{mq}$$

Donc

$$a^{s+t} = a^{\frac{nq+pm}{mq}}$$

et

$$a^s.a^t = a^{\frac{nq}{mq}}.a^{\frac{pm}{mq}}$$

Prenons la puissance $mq$ de chaque côté :

$$(a^{s+t})^{mq} = (a^{\frac{nq+pm}{mq}})^{mq} = a^{nq+pm}$$

$$(a^s.a^t)^{mq} = (a^{\frac{nq}{mq}}.a^{\frac{pm}{mq}})^{mq} = (a^{\frac{nq}{mq}})^{mq}.(a^{\frac{pm}{mq}})^{mq} = a^{nq}.a^{pm} = a^{nq+pm}$$

Donc chaque côté est une racine $mq$-ième de $a^{nq+pm}$. Comme la racine positive est unique (Corollaire 3.5.2), $a^{s+t}$ et $a^s.a^t$ sont identiques.

Pour finir on vérifié la formule (iv). On veut montrer que

$$(a^{\frac{n}{m}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m}.\frac{p}{q}}$$

Nous vérifions, en utilisant les formules déjà établies pour les exposants naturels, que les membres de droite et de gauche coïncident avec $a^{np}$ après avoir pris leurs puissances $mq$. Par unicité de la $mq$-racine positive de $a^{np}$, ils doivent donc coïncider.

□

**Quizz 4.2.8**

Simplifier les formules :

$$9^{\frac{1}{2}} \ , \ (16)^{\frac{3}{4}} \ , \ (\frac{1}{5})^{-2} \ , \ (3^{-1})^2 \ , \ (\frac{5}{2})^{-2} \ , \ (8)^{-\frac{3}{2}} \ , \ (\frac{-27}{8})^{\frac{2}{3}}$$

$$5^{27}.5^{-24} \ , \ 8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}} \ , \ (-125)^{\frac{2}{3}} \ , \ \frac{3^{n+2}}{3^{n-2}}$$

**Remarque 4.2.9**

La Remarque 4.2.5 peut être étendue à la fonction $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+^*$ de la Construction 4.2.6. Regardons le cas $a > 1$. Prenons $0 < s = \frac{n}{m} \leq t = \frac{p}{q}$ dans $\mathbb{Q}^+$. Par réduction au même dénominateur on peut supposer $m = q$. Il faut donc montrer que si $\frac{n}{m} \leq \frac{p}{m}$ alors $a^{\frac{n}{m}} \leq a^{\frac{p}{m}}$. Rappelons que $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$. On a comme

conséquence directe de la Remarque 4.2.5 que $a^n \leq a^p$. Donc, il suffit d'utiliser le fait que la fonction $\sqrt[m]{-}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est strictement croissante (voir Corollaire 3.5.2).
Pour les puissances rationnelles négatives on remplace $a$ par $\frac{1}{a}$ et utilise le même argument.

On peut maintenant revenir à la stratégie de la Remarque 4.2.1. On montre qu'il existe une unique façon de faire le remplissage dans la Remarque 4.2.2 de façon compatible avec la loi des puissances du Problème 4.1.16 :

**Théorème 4.2.10 (Existence de la fonction exponentielle)**

Soit $a$ un nombre réel strictement positif. Alors, il existe une unique fonction monotone $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$f_a(s) = a^s \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{Q} \tag{4.4}$$

La fonction $f_a$ est continue et c'est la seule fonction continue vérifiant la formule (4.4). En plus, si $a > 1$, $f_a$ est strictement croissante, si $a = 1$, $f_a$ est constante et si $0 < a < 1$, $f_a$ est strictement décroissante.

*Démonstration.* Supposons $a > 1$. Si $0 < a < 1$ il suffit de remplacer $a$ par $\frac{1}{a}$ et appliquer le même argument.

La fonction $f_a$ que l'on cherche doit respecter

$$a^u \leq f_a(s) \leq a^v$$

pour tout $u < s < v$ avec $u$ et $v$ dans $\mathbb{Q}$. On considère :

$$E = \{a^u : u < s\,,\, u \in \mathbb{Q}\} \qquad F = \{a^v : s < v\,,\, v \in \mathbb{Q}\}$$

Les parties $E$ et $F$ sont, par construction, non-vides car la fonction $f_a$ est bien définie sur les rationnels. D'après la Remarque 4.2.9, la fonction $f_a$ est monotone sur $\mathbb{Q}$. Donc, pour tout $e \in E$ et $f \in F$, on a $e \leq f$. On est donc dans la situation de la Proposition 3.2.21 qui nous explique qu'il n'y pas des espaces vides dans $\mathbb{R}$. Il existe donc un nombre réel $w$ tel que pour tout $e \in E$ et $f \in F$ on a

$$e \leq w \leq f$$

On veut poser $f_a(s) = w$ mais pour ça il faut montrer que $w$ est l'unique élément entre $E$ et $F$. Pour cela on utilise le dernière critère de la Proposition 3.2.21 : il suffit de montrer que pour tout petit distance $r > 0$ on peut trouver un élément $e = a^u$ dans $E$ et $f = u^v$ dans $F$ tels que $a^u - a^v < r$. Par le Proposition 3.2.17, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ entre $s - \frac{1}{n}$ et $s$ on peut trouver un $u_n \in \mathbb{Q}$. Donc $u_n < s < u_n + \frac{1}{n} =: v_n$. Alors

$$a^{v_n} - a^{u_n} = a^{u_n}(a^{\frac{1}{n}} - 1) \leq sup(E).(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

Par l'Exercice 3.9.12, $\lim_n a^{\frac{1}{n}} = 1$ donc, pour tout $r > 0$ et pour $n$ assez grand, on a $|a^{\frac{1}{n}} - 1| < r$.

On pose donc $f_a(s) = w$. La Proposition 3.4.24 implique donc que

$$\lim_{x \to s, x \in X} f_a(x) = sup(E) = w = f_a(s) = inf(F) = \lim_{x \to s, x \in F} f(x)$$

et par Corollaire 3.4.23, la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que nous venons de construire, est continue.

Pour finir, la continuité de $f_a$, en combinaison avec la Remarque 4.2.9, implique que $f_a$ est monotone : si $a > 1$, $f_a$ est strictement croissante, si $a = 1$, $f_a$ est constante et si $0 < a < 1$, $f_a$ est strictement décroissante. □

**Proposition 4.2.11**

Soit $a > 0$. La fonction $f_a$ du Théorème 4.2.10 vérifie les propriétés du Remarque 4.2.1 :

1. $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$, $a^{s+t} = a^s * a^t$ ;
2. $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$, $(a^s)^t = a^{s.t}$

*Démonstration.* En effet, par le Lemma 4.2.7, la restriction de $f_a$ à $\mathbb{Q}$ vérifies les propriétés du Remarque 4.2.1. Par continuité $f_a$ vérifie donc les mêmes propriétés. Par exemple, pour montrer (1), prenons $s_n \to s$ et $t_n \to t$ des suites convergentes avec $s_n, t_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 0$. Alors par continuité de la fonction exponentielle

$$a^s = \lim_n a^{s_n} \qquad a^t = \lim_n a^{t_n}$$

Par lExercice 3.9.7

$$a^{s+t} = \lim_n a^{s_n + t_n} = \lim_n .(a^{s_n}.a^{t_n}) = (\lim_n a^{s_n}).(\lim_n a^{t_n}) = a^s.a^t$$

où pour chaque $n \geq 0$ la formule $a^{s_n}.a^{s_n} = a^{s_n + t_n}$ est vrai d'après le Lemma 4.2.7.

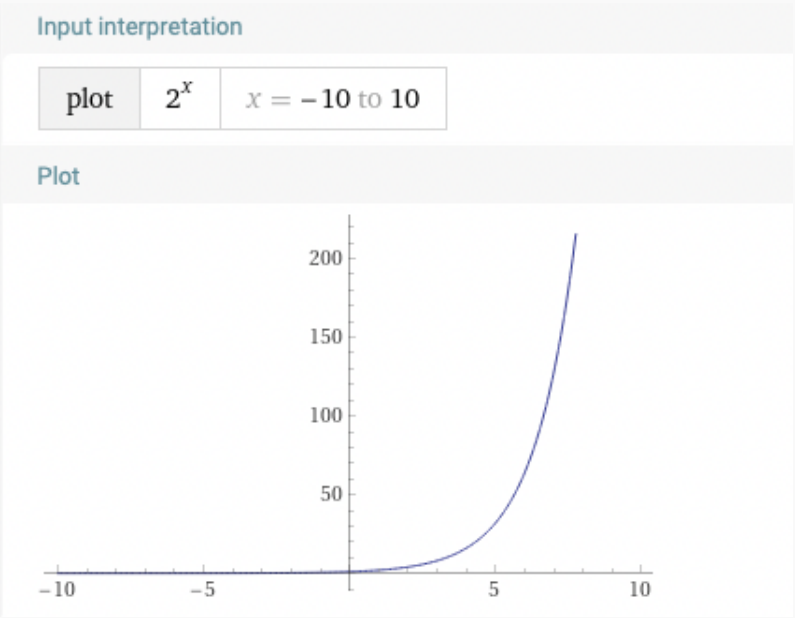
Un argument similaire permet de montrer la formule (2). □

**Définition 4.2.12**

Soit $a$ un nombre réel strictement positif. On appelle *fonction exponentielle* de base $a$, et on écrit $\exp_a$, la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction dont l'existence et l'unicité sont assurées par le Théorème 4.2.10. Par abus de notation on continuera à écrire $a^x = \exp_a(x)$ pour $x$ un nombre réel.

**Exemple 4.2.13**

On reprendre ici l'Exemple 4.1.9 et Exemple 4.1.11. Par le Théorème 4.2.10 on connaît l'existence d'une fonction exponentielle de base $2$, $\exp_2$ qui étend les puissances de $2$ à tous les nombres réels :




WolframAlpha

**Exemple 4.2.14**

On reprendre la stratégie de la Remarque 4.2.1 pour calculer $10^{\sqrt{2}}$.

**Exemple 4.2.15**

Dans la presse du 28/01/2021, à propos du Covid, le Ministre des Solidarités et de la Santé a explique que :

« Le virus circule à un niveau élevé et nous sommes sur un plateau montant, qui augmente de 10% par semaine... La grande différence aujourd'hui est que la dynamique n'est pas exponentielle. »

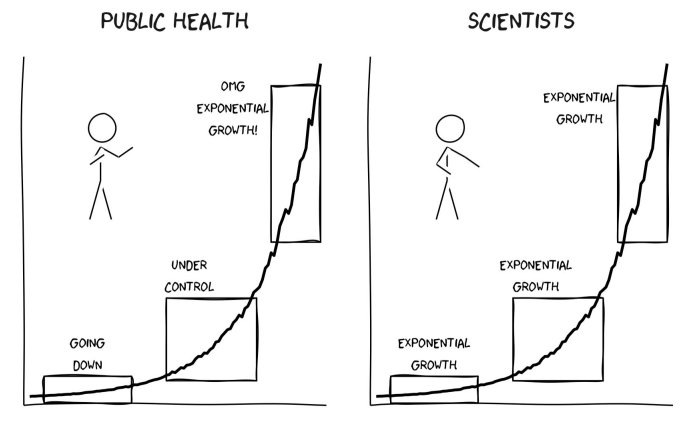
Analysons donc ce que signifie une augmentation de $10\%$ par semaine. Soit $N(t)$ le nombre de cas au bout de $t$ semaines et soit $N_0$ la quantité de patients lorsque l'on commence le comptage ($t = 0$). Alors $10\%$ par semaine signifie qu'au bout d'une semaine ($t = 0$) on aura

$$N(t = 1) = N_0 + 10\% \text{ de } N_0 = N_0 + (0,1) * N_0 = (1 + 0,1) * N_0 = (1,1) * N_0$$

Posons $a = 1,1$. Donc au bout de $t$ semaines avec une augmentation de $10\%$ par semaine on aurait :

$$N(t) = N_0 * a^t$$

Eh bien, **c'est précisément par définition la fonction exponentielle** $\exp_a$ **(Définition 4.2.12). En fait, ce que ce calcule montre c'est que lorsque nous parlons d'une augmentation de $\lambda\%$ (par seconde, par semaine chaque année, etc.), on parle précisément d'une fonction exponentielle.**




**Exemple 4.2.16 (Radioactivité)**

Nous concluons en montrant que les propriétés du Définition 4.2.12 caractérisent complètement les fonctions exponentielles :

**Théorème 4.2.17**

Toute fonction à valeur réelle $f$ définie sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas la fonction nulle, vérifie la formule

$$f(x + y) = f(x).f(y)$$

et est monotone ou continue, est une fonction exponentielle.

*Démonstration.* Comme $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2$, alors $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $f$ n'admet pas de zéros : en effet,supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$. Comme $f(x) = f((x-c)+c) = f(x-c)f(c)$, on aura aussi $f(x) = 0$ pour tout $x$. Mais par hypothèse $f$ n'est pas la fonction nulle. Donc, $f$ n'admet pas de zéros.

Posons $a = f(1)$. On veut montrer que $f = \exp_a$. On vérifie d'abord que c'est vrai pour $x = n \in \mathbb{N}$ : en effet, $f(2) = f(1+1) = f(1)^2 = a^2$. Par récurrence, $f(n) = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$ on a $f(0) = 1$. Pour $x = -1$ on a $1 = f(0) = f(1).f(-1)$ donc $f(-1)$ est l'inverse de $f(1)$, donc $f(-1) = a^{-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a donc $f(n) = a^n$.
Ensuite, soit $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^+$. Comme $f(\frac{n}{m})^m = f(m\frac{n}{m}) = f(n) = a^n$, $f(\frac{n}{m})$ est une racine m-ième de $a^n$. Comme $f(\frac{n}{m})$ est positif, par l'unicité de la racine m-ième (Corollaire 3.5.2) on a $f(\frac{n}{m}) = a^{\frac{n}{m}}$.

Finalement, comme $f$ est continue, l'unicité donnée par le Théorème 4.2.10 implique que $f = \exp_a$.

□

**Remarque 4.2.18**

Soit $a > 0$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

## 4.3. La fonction logarithme et l'échelle logarithmique

On peut maintenant revenir à la notion d'ordre de grandeur :

**Remarque 4.3.1**

Dans la Définition 4.1.1 nous avons défini l'ordre de grandeur comme l'entier $n$ dans l'exposant de $10^n$. D'aprés le Théorème 4.2.10 on sait que la fonction exponentielle de base $10$ existe sur $\mathbb{R}$, $f_{10} = 10^{(-)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et est strictement croissante. Donc, bijective sur sont image. Grâce au Théorème 3.5.1 on sait que $10^{(-)}$ est une admet une fonction inverse continue strictement monotone.

On la note $\log_{10} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

**Définition 4.3.2**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *ordre de grandeur de* $x$, le nombre réel $y = \log_{10}(x)$, c'est á dire, tel que $10^y = x$.

**Proposition 4.3.3**

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\log_{10}(xy) = \log_{10}(x) + \log_{10}(y)$$

*Démonstration.* Par définition de $\log_{10}$, il suffit de montrer que

$$10^{\log_{10}(xy)} = 10^{\log_{10}(x)+\log_{10}(y)}$$

Comme $\log_{10}$ est l'inverse de $10^{(-)}$, on a $10^{\log_{10}(xy)} = xy$. Grâce à Proposition 4.2.11 on sait aussi que

$$10^{\log_{10}(x)+\log_{10}(y)} = 10^{\log_{10}(x)}.10^{\log_{10}(y)} = x.y$$

□

**Exemple 4.3.4 Échelle de Richter**

L'échelle de Richter pour les séismes établit un lien entre la magnitude $M$ du séisme et la quantité d'énergie $E$ (en joules) par la formule

$$\log_{10}(E) = 4.4 + 1.5M$$

Par exemple, pour un séisme de magnitude $M = 5$, on a $\log_{10}(E) = 4.4+1.5*5 = 11.9 \sim 12$ d'où $E = 10^{12}$ joules (comparer avec Exemple 4.1.7). Le séisme de 2004 à Sumatra a eu une magnitude $M = 9.1$ pour une énergie $E = 10^{18}$ joules.

C'est aussi intéressant de comparer un séisme de magnitude $M$ et un de magnitude $M + 1$ :

$$\log_{10}(E_{M+1}) = 4.4 + 1.5(M + 1) = 4.4 + 1.5M + 1.5 = \log_{10}(E_M) + 1.5$$

d'où

$$E_{M+1} = E_M \times 10^{1.5}$$

avec $10^{1.5} \sim 31$. Un ordre de grandeur au-dessus correspond à un tremblement de terre $31$ fois plus puissant.

Plus généralement, le même argument permet de définir la fonction logarithme de base $a$ :

**Corollaire 4.3.5**

Soit $a > 0$. Alors la fonction exponentielle $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ admet une fonction inverse continue monotone. On l'appelle *logarithme de base* $a$, et on la note $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

**Quizz 4.3.6**

Simplifier :

$$\log_{10}(10^{-9}), \quad \log_{10}(\frac{10^3}{\sqrt{10}}), \quad \log_2(16), \quad 5^{\log_5(32))}$$

**Exemple 4.3.7 Décibels**

$$\beta = 10.\log_{10}(\frac{I}{I_0})$$

**Exemple 4.3.8 pH**

## 4.4. Boucles de renforcement, l'exponentielle et la méthode d'Euler

On calcule la dérivée de la fonction exponentielle $\exp_a$ (Définition 4.2.12). Par définition, la dérivée en $x$ est donnée par la limite Définition 3.7.3 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

Par le Théorème 4.2.17 on a $a^{x+h} = a^x.a^h$ donc

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x.a^h - a^x}{h} = a^x.(\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h})$$

L'existence de la dérivée de $a^x$ est donc équivalent à l'existence de la limite $L(a) := \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$. Cela ne dépend que du nombre réel $a$. Si $L(a)$ existe, on aura donc

$$f'_a = L(a).f_a \tag{4.5}$$

avec $L(a)$ une constante.

**Lemme 4.4.1**

Soit $a > 0$. Alors la limite $L(a)$ existe.

*Démonstration.* On regarde le cas $a > 1$. Si $0 < a < 1$ la même preuve marche si on remplace $a$ par $\frac{1}{a}$. On commence par calculer la limite

$$\lim_{h \to 0^+} g(h)$$

où $g(h) = \frac{a^h - 1}{h}$. Comme $a > 1$, on a $a^h > 1$. Comme $h > 0$ ici, on a aussi $g(h) > 0$. Alors, l'image de $g$ est minorée et par Axiome 3.2.10 , admet une borne inférieure $> -\infty$. Si on montre que la fonction $g(h)$ est croissante pour $h > 0$, alors la Proposition 3.4.24 implique que la limite existe, donnée par la borne inférieure. Il suffit donc de montrer que la fonction $h \mapsto \frac{a^h - 1}{h}$ est croissante pour $h > 0$.

Soit $0 < u \leq v$. On cherche à montrer que

$$\frac{a^u - 1}{u} \leq \frac{a^v - 1}{v}$$

Il suffit de montrer que

$$v.a^u - u.a^v \leq v - u$$

Par continuité de l'exponentielle $a^x$ (Théorème 4.2.10), et les propriétés dans Exercice 3.9.7 il suffit de montrer cette formule remplaçant $u$ et $v$ par des suites $u_n \to u$ et $v_n \to v$ avec $u_n, v_n \in \mathbb{Q}$ :

$$\lim_n (u_n.a^{v_n} - v_n.a^{u_n}) = v.a^u - u.a^v$$

$$\lim_n (v_n - u_n) = v - u$$

Il suffit donc de montrer le cas où $u \leq v$ avec $u, v \in \mathbb{Q}$. Posons $u = \frac{p}{n}$, $v = \frac{q}{n}$, avec $p < q, p, q \in \mathbb{Z}$. Il faut montrer que

$$\frac{a^{\frac{p}{n}} - 1}{\frac{p}{n}} \leq \frac{a^{\frac{q}{n}} - 1}{\frac{q}{n}}$$

ou de façon équivalente, si on pose $b = a^{\frac{1}{n}}$, qu'on a

$$\frac{b^p - 1}{p} \leq \frac{b^q - 1}{q}$$

Comme $a > 1$, on a aussi $b = \sqrt[n]{a} > 1$. Posons $b = 1 + c$ avec $c > 0$. On a

$$b^p = (c+1)^p = \sum_{i=0}^{p} \frac{p!}{(p-i)!.i!} c^{p-i} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{p!}{(p-i)!.i!} c^{p-i} \quad + 1$$

On a

$$\frac{b^p - 1}{p} = \frac{\sum_{i=0}^{p-1} \frac{p!}{(p-i)!.i!} c^{p-i}}{p} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{p!}{(p-i)!.(i!).p} c^{p-i} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-i)!.i!} c^{p-i}$$

$$= \frac{c^p}{p} + c^{p-1} + \frac{(p-1)}{2!} c^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{3!} c^{p-3} + ... + c$$

Finalement, il suffit de voir que pour $n < m$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$ on a $\frac{c^n}{n!} \leq \frac{c^m}{m!}$ pour chaque terme.

□

**Corollaire 4.4.2**

Soit $a > 0$. Alors la fonction exponentielle $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\exp'_a = L(a).\exp_a$.

La question du calcul explicite de la valeur de $L(a)$ est plus délicate. Ce que nous ferons à la place, c'est la rétro-ingénierie du cas le plus simple possible où on suppose $L(a) = 1$ :

**Proposition 4.4.3**

Imaginons une fonction $f$ qui vérifie l'équation $f' = 1.f$ avec $f(0) = 1$. Alors $f$ est une fonction exponentielle.

*Démonstration.* Si $f$ vérifie $f' = f$ alors $f$ est dérivable et donc continue. Grâce au Théorème 4.2.17 il suffit donc de montrer que $f(x+y) = f(x).f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Posons une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(z) = f(x+y-z).f(z)$$

Alors, $g$ est le produit de fonctions dérivables, donc est dérivable (Proposition 3.7.5). On a pour tout $z$

$$g'(z) = f'(x+y-z).(-1).f(z) + f(x+y-z).f'(z) =$$

$$= -f(x+y-z).f(z) + f(x+y-z).f(z) = 0$$

Donc , par Corollaire 3.7.11, $g$ est constante = $g(0) = f(x+y).f(0) = f(x+y).1 = f(x+y)$.

Finalement on a pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y-z).f(z) = f(x+y).$$

Posons donc $z = y$, on trouve

$$f(x).f(y) = f(x+y).$$

Par le Théorème 4.2.17 $f$ est une fonction exponentielle, c'est à dire, de la forme $a^x$ pour un certain $a = f(1) \in \mathbb{R}$ □

Voila donc la vrai question :

**Problème 4.4.4**

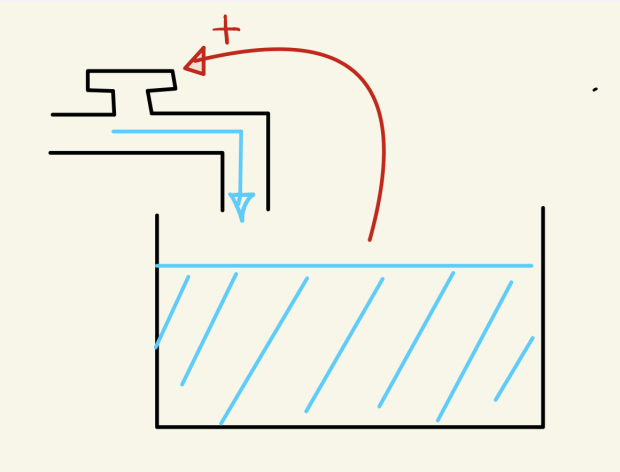
Est-ce qu'il existe vraiment une fonction $f$ qui vérifie

$$f' = f$$

et $f(0) = 1$ ?

**Remarque 4.4.5**

Une façon schématique de visualiser $f' = f$ consiste à considérer une boucle de rétroaction positive : plus $f$ est important, plus sa dérivée est importante et donc plus $f$ augmente, suivant un cycle sans fin.



**Théorème 4.4.6 (Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler)**

Il existe une unique solution de $f' = f$ avec $f(0) = 1$.

*Démonstration.* Commençons par montrer l'unicité, supposons que $g$ est aussi solution, $g' = g$. Posons

$$h(x) = g(x).f(-x)$$

On a pour tout $x$

$$h'(x) = g'(x).f(x) - g(x).f'(-x) = g(x)f(x) - g(x).f(x) = 0$$

donc, par Corollaire 3.7.11, $h(x)$ est une fonction constante. Comme $h(0) = g(0).f(0) = 1 * 1 = 1$, on a $g(x).f(-x) = 1$. Comme $f$ est solution aussi, on a aussi $f(x).f(-x) = 1$. On a donc $g(x) = f(x)$.

Essayons de construire une solution. On commence par chercher la valeur de $f(1)$. La méthode utilisée s'appelle la méthode d'Euler. On connaît la valeur de $f$ en $0$ mais on connaît aussi la valeur de sa dérivée en $0$. L'idée est la suivante - en connaissant la position de départ $f(0)$ et toutes les vitesses $f'$, nous pouvons essayer de reconstruire la trajectoire et de déterminer la position après $1$ seconde, $f(1)$.

Supposons qu'une solution existe, $f$, et qu'on veut calculer la valeur $f(0 + h)$ avec $h$ très proche de zéro. Alors comme $f'(0) = f(0)$,

$$f(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

Donc pour $h$ positive et très proche de zéro, on a une formule approximative

$$f(h) = f(0)h + f(0) = f(0)(1 + h)$$

Comme on suppose $f(0) = 1$, on a

$$f(h) = f(0)h + f(0) = (1 + h)$$

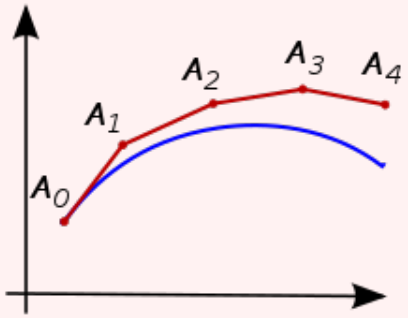
On peut maintenait essayer de calculer la valeur de $f$ un petit pas plus loin, par exemple, en $0 + 2h$. Ici, la même stratégie s'applique : on sait que $f'(h) = f(h)$ et donc de manière approximative on prend le point de départ $x = h$, on suppose que la vitesse est constante le long du chemin entre $h$ et $2h$ et on fait une extrapolation :

$$f(2h) = f(h) + h.f'(h) = f(h)(1 + h) = (1 + h)^2$$

On peut itérer la méthode et trouver

$$f(nh) = (1 + h)^n$$

En pratique cette stratégie revient à approximer une courbe par ses droites tangentes successives :




En générale, si on choisit $h$ tel que $1 = nh$, la valeur $(1+h)^n$ est très différente de $f(1)$. L'idée c'est de considérer des partitions de l'intervalle $[0,1]$ par de pas de plus en plus petits et se rapprocher de plus en plus de la vraie valeur $f(1)$. Notamment, on s'interesse à étudier la limite

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

On montre que cette limite existe : on pose $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ et on commence par montrer que la suite $u_n$ est croissante. Par la formule du binôme

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

On peut aussi vérifier par récurrence que pour $2 \leq k \leq n$ on a

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{(k-1)}{n})$$

Donc

$$u_n = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}(1-\frac{j}{n}) \tag{4.6}$$

$$u_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}(1-\frac{j}{n+1})$$

On vérifie que pour chaque $k$, on a

$$(1-\frac{k}{n+1}) - (1-\frac{k}{n}) = \frac{k}{n(n+1)} \geq 0$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

et la suite est croissante.

Pour montrer que la suite converge, il suffit (par Proposition 3.3.7) de montrer qu'elle est majorée. Regardons la formule (4.6) : on a $(1 - \frac{j}{n}) \leq 1$ car $j < n$. Donc,

$$u_n \leq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$$

On montre par récurrence que $2^n \leq (n+1)!$. Donc

$$u_n \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Par l'Exemple 3.8.2, on a

$$u_n \leq 2 + 1 \leq 3$$

La suite est donc croissante et majorée. On note

$$e := \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

la limite.

Cette stratégie nous permet de reconstruire la valeur de $f(1)$. Nous pouvons maintenant appliquer la même stratégie pour construire $f(x)$ pour n'importe quel $x$ à partir de $f(0)$ : en prenant des petits pas de taille $h$ à la fois, nous pouvons écrire $x = hn$ avec $n > |x|$, et considérer la limite

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

Pour montrer que la limite existe pour $x$ quelconque on aura besoin d'une stratégie plus fine. Posons, pour $n > |x|$

$$u_n(x) := (1 + \frac{x}{n})^n \qquad v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)} = (1 - \frac{x}{n})^{-n}$$

Comme on considère $n > |x|$, on a $u_n(x) > 0$ pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$. On montre que la suite $u_n(x)$ est croissante, $v_n(x)$ est décroissante et que $u_n(x) - v_n(x)$ converge vers $0$. Par Exercice 3.9.7-(6), la suite $u_n(x)$ est convergente.

— Pour tout $x$, la suite $u_n(x)$ est croissante. Par un petit calcul, on remarque que

$$(1 + \frac{x}{n+1}) = (1 + \frac{x}{n}).(1 - \frac{x}{n(n+1)(1 + \frac{x}{n})})$$

Donc

$$u_{n+1}(x) = (1 + \frac{x}{n+1})^{n+1} = (1 + \frac{x}{n})^{n+1}.(1 - \frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})})^{n+1}$$

$$u_{n+1}(x) = u_n(x).(1 + \frac{x}{n}).(1 - \frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})})^{n+1}$$

Il nous faut montrer que

$$(1 + \frac{x}{n}).(1 - \frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})})^{n+1} \geq 1$$

Pour cela on montre un petit lemme par récurrence : pour tout $\lambda > -1$ et $n \geq 1$, on a $(1+\lambda)^n \geq 1 + n\lambda$. On laisse la preuve comme exercice. Par conséquent, dans notre cas

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right) . \left(1 - \frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right) . \left(1 - \frac{(n+1)x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})}\right)$$

Finalement, un calcul directe montre que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right) . \left(1 - \frac{(n+1)x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})}\right) = 1$$

Donc $u_n(x)$ est croissante.

— $v_n(x)$ est décroissante. Puisque $u_n(x)$ est croissante pour tout $x$, $u_n(-x)$ aussi est croissante. Donc $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$ est décroissante.

— $u_n - v_n$ converge vers zéro. De façon équivalent, il suffit de voir que $\frac{u_n(x)}{v_n(x)}$ converge vers $1$. On calcul explicitement

$$\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n . \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left((1 + \frac{x}{n}).(1 - \frac{x}{n})\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n$$

Par le petit lemme évoqué ci-dessus,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq \left(1 - \frac{n.x^2}{n^2}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)$$

et par construction

$$\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$$

Donc

$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right) \leq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$$

Par le théorème de gendarmes pour les suites (Exercice 3.9.7-(5)),

$$\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \to 1$$

Finalement, on pose

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad , \quad n > |x|$$

Par construction on a $f(0) = 1$. Il reste à vérifier que $f$ est dérivable et que $f' = f$. On montre que la limite

$$\lim_{h\to} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existe et est égale à $f(x)$. On commence par calculer $u_n(x+h)$. D'abord on peut faire un petit calculer pour montrer qu e

$$\left(1+\frac{x+h}{n}\right) = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{h}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)$$

En utilisant cette formule, on a

$$\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{h}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)^n$$

et donc pour $|h| < 1$, $n > |x|+1$, on a

$$u_n(x+h) = u_n(x).\left(1+\frac{h}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)^n$$

Encore une fois on utilise le petit lemme évoqué ci-dessus, et on trouve

$$u_n(x+h) \geq u_n(x).\left(1+\frac{h}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)^n$$

et par passage à la limite $n \to +\infty$, on trouve

$$f(x+h) \geq f(x).(1+h)$$

En remplaçant, $h$ par $-h$, on trouve $f(x-h) \geq f(x).(1-h)$ et si on pose $y = x-h$ on a $f(y) \geq f(y+h).(1-h)$. C'est vrai pour tout $y$, donc aussi,

$$f(x) \geq f(x+h).(1-h)$$

Pour $h > 0$ on a

$$\frac{f(x)}{1-h} = \frac{\frac{f(x)}{1-h} - f(x)}{h} \geq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \frac{f(x).(1+h) - f(x)}{h} = f(x)$$

et pour $h < 0$

$$\frac{f(x)}{1-h} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq f(x)$$

Dans les deux cas, la limite $h \to 0$ existe et est égale à $f(x)$. La fonction est donc dérivable.

□

**Définition 4.4.7**

On appelle le nombre réel $e$ obtenu dans la preuve du Théorème 4.4.6 le nombre d'Euler ou constante de Néper. On note $e^x = \exp_e(x)$ et $\ln(x) := \log_e(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

**Corollaire 4.4.8**

La seule solution de $f' = f$ avec $f(0) = C$ c'est la fonction $f(x) = C.e^x$.

*Démonstration.* En effet, soit $f$ une solution de $f' = f$ avec $f(0) = C$. On pose $g = \frac{f}{C}$. Alors $g' = \frac{f'}{C} = g$ avec $g(0) = \frac{f(0)}{C} = 1$. Par le Théorème 4.4.6 et la Définition 4.4.7, $g(x) = e^x$ donc $f(x) = C.e^x$.

□

**Corollaire 4.4.9**

Soit $a > 0$. Alors les deux fonctions

$$\exp_a = \exp_e(\ln(a) * (-))$$

coïncident. En plus, on a $L(a) = \ln(a)$.

*Démonstration.* Par l'unicité de la fonction exponentielle (Théorème 4.2.10, Théorème 4.2.17 ), il suffit de montrer que $\exp_a(1) = \exp_e(\ln(a))$. Comme par définition, $\ln = \log_e$, on a de chaque côté : $a^1 = a^1$. Finalement si on dérive de chaque côté, on obtient $L(a) = \ln(a)$. □

**Remarque 4.4.10**

En particulier, on peut maintenant facilement passer des puissances de $10$ à des puissances de $2$ :

$$10^x = e^{\ln(10)*x} = e^{\ln(2)\frac{\ln(10)}{\ln(2)}*x} = 2^{\frac{\ln(10)}{\ln(2)}*x}$$

On trouve $\ln(10)/\ln(2) \sim 3.32$, compatible avec l'approximation utilisé dans l'Exemple 4.1.11.

Nous arrivons donc à trois façons de caractériser la fonction exponentielle et à la démonstration du Théorème 2.3.3 :

**Corollaire 4.4.11**

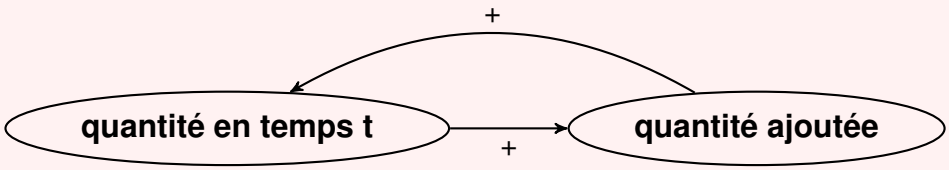
Il existe une fonction, que nous appelons exponentielle, qui a les caractérisations équivalentes suivantes :

— c'est la seule façon continue d'étendre les puissances $10^n$ à tous les nombres réels $10^x$ en respectant la formule $10^{x+y} = 10^x.10^y$ (Théorème 4.2.10).

— c'est le seul résultat d'une évolution à taux constant $\%$ par unité de temps (Exemple 4.2.15).

— c'est le seul mécanisme qui transforme la loi de l'addition en loi de la multiplication (Théorème 4.2.17).

— c'est la seule solution d'une boucle de rétroaction positive (Théorème 4.4.6)




**Exemple 4.4.12**

On reprendre ici l'Exemple 4.2.15.. La variable $t$ représente le nombre de semaines avec $t = 0 =$ minuit du premier janvier. Le nombre de malades au but de

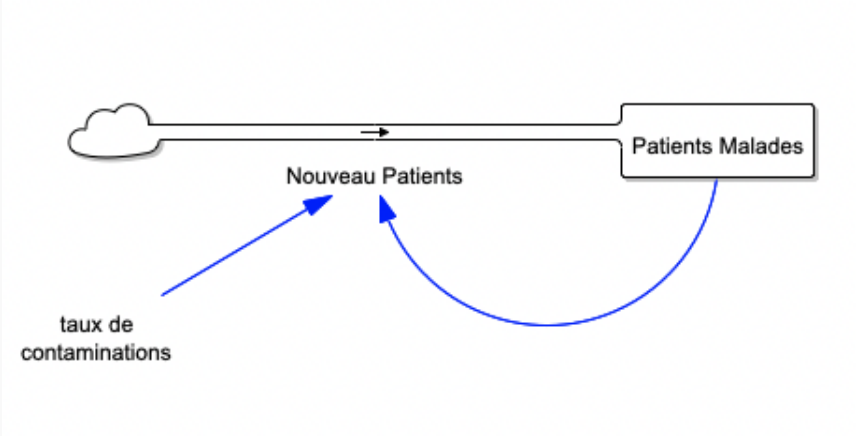
$t$ semaines est donc $N(t) = N_0.(1,1)^t$. Grâce au Théorème 4.4.6 on sait que

$$N(t) = N_0.(1,1)^t = N_0.e^{\ln(1.1)*t}$$

et donc, sa dérivée vérifie l'équation

$$\frac{d\,N(t)}{dt} = \ln(1.1) * N(t)$$

et ça correspond donc a une boucle de rétroaction positive




**Définition 4.4.13**

Considérons la fonction exponentielle $f(t) = a^t = e^{\ln(a).t}$ pour $a > 0$. Le *temps de doublement* de $f$ c'est le temps $T$, nécessaire pour double la fonction $f$, c'est á dire, la solution de $f(t+T) = 2 * f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Concrètement :

$$f(t+T) = e^{\ln(a)*(t+T)} = 2 * f(t) = 2 * e^{\ln(a)*t}$$

$$e^{\ln(a)*t} * e^{\ln(a)*T} = 2 * e^{\ln(a)*t}$$

Comme $e^{\ln(a)*t} > 0, \forall t$ on peut diviser par $e^{\ln(a)*t}$ de chaque côté. On obtient :

$$e^{\ln(a)*T} = 2$$

donc

$$T = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

**Exemple 4.4.14 (Population de Bactéries)**

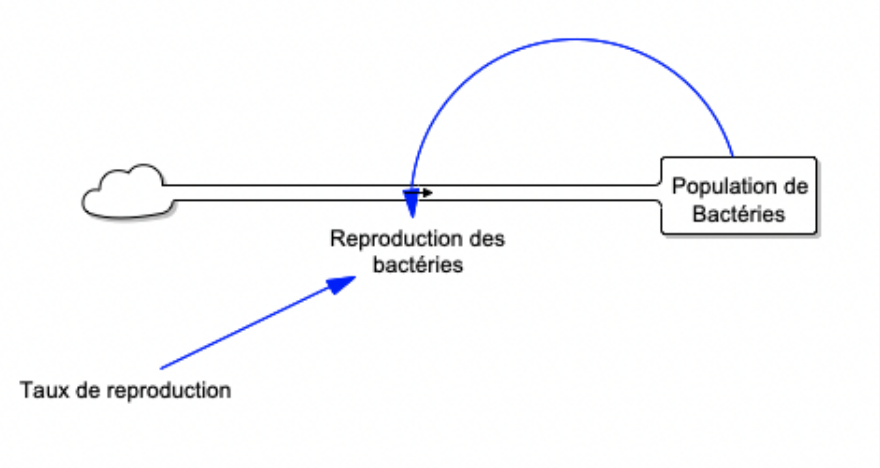
On considère une population de bactéries dont la taille double chaque minute. En $t = 0$, on commence avec une bactérie, en $t = 1$ minute on a 2 bactéries, etc. Soit $P(t)$ quantité de bactéries au bout de $t$ minutes. Par hypothèse on a $P(0) = 1$. En sachant que le temps de doublement de $P(t)$ est d'une minute, on sait que $P(t)$ est de la forme $a^t$ avec $\ln(a) = \frac{\ln(2)}{T=1}$. Donc

$$P(t) = e^{\ln a * t} = e^{\ln(2) * t} = 2^t$$

La dérivée de $P(t)$ vérifie donc l'équation

$$P'(t) = \ln(2) * P(t)$$

et ça correspond donc a une boucle de rétroaction positive




**Exemple 4.4.15**

**Exemple 4.4.16**

**Définition 4.4.17**

Soit $k > 0$. La durée de vie moyenne $\lambda$ associée à la fonction exponentielle $f(t) = e^{-kt}$ est

$$\lambda = \frac{1}{k}$$

**Exemple 4.4.18 (Ressource limitée )**

Un réservoir d'eau continent 600 litres d'eau. La consommation augmente de $3\%$ par jour. Combien de jours avant que nous ayons moins d'un litre ? Si on pose $L(t)$ la quantité d'eau le jour $t$, avec $L(0) = 600$, la quantité d'eau le jour 1 est donnée par

$$L(1) = L(0) - 3\% \text{ de } L(0) = (1 - 0.03) * L(0) = (0.97) * Q(0)$$

En générale :

$$L(t) = (0.97)^t * L(0)$$

$$Q(t) = (0.97)^t * Q(0) = e^{\ln(0.97)*t} * L(0)$$

On a $\ln(0.97) \sim -0.03$ , donc

$$L(t) = e^{-(0.03)*t} * L(0)$$

Comme l'exponentielle est décroissante, il faut donc résoudre

$$L(t) = e^{-(0.03)*t} * L(0) = 1$$

$$e^{-(0.03)*t} = \frac{1}{L(0)}$$

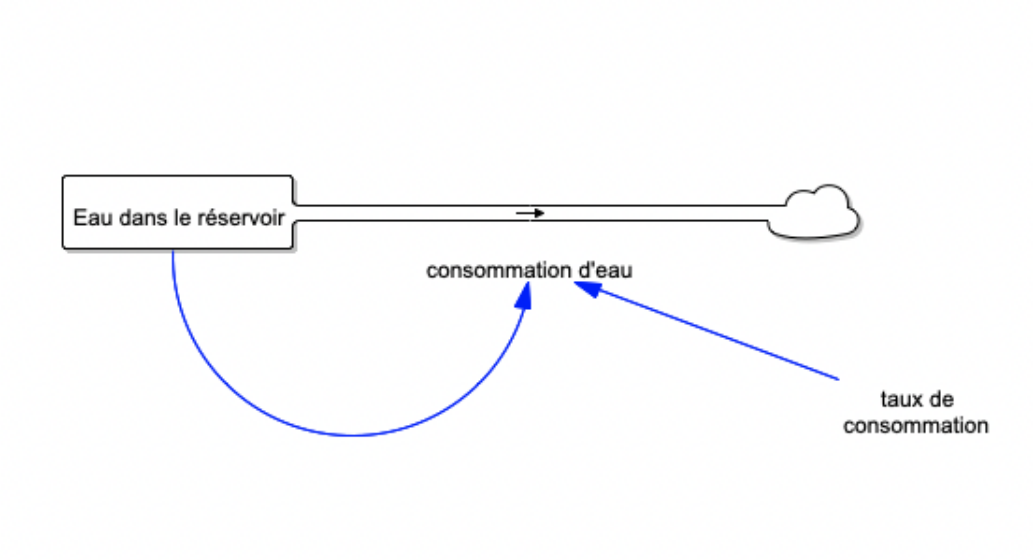
$$-0.03 * t = \ln(\frac{1}{600})$$

On obtient $t = 213$ jours.

La dérivée de $L(t)$ vérifié l'équation

$$\frac{dL}{dt} = -0.03 * L(t)$$

Ça correspond à une boucle de rétroaction de la forme




**Remarque 4.4.19**

Dans l'Exemple 4.4.18 on a constaté que

$$\ln(0.97) = \ln(1 - 0.03) \sim -0.03.$$

Ce n'est pas simplement de la chance. C'est une conséquence du fait que le développement limité de $\ln(1 + x)$ est de la forme

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$$

donc pour $x$ suffisamment petit, on a $\ln(1 + x) \sim x$. (Voir Poly S1)

**Exemple 4.4.20**

Pour acheter une tablette de P=400€ on fait un prêt. Chaque mois il faut rembourser r=2% de ce qui reste à payer. La banque prendre un taux d'interêt de $\tau$=1.3% par mois. Combien avons-nous payé après $n$ mois ?

— En $t = 0$ (aujourd'hui), on doit 400 euros à la banque et on doit payer $rP$. Il nous restera à payer $P(1 - r)$.

— En $t = 1$ mois, à cause du taux d'interêt, on doit

$$P(1 - r) + P(1 - r) * \tau = P(1 - r)(1 + \tau)$$

à la banque. On doit donc payer $r.P(1 - r)(1 + \tau)$ et il nous restera $P(1 - r)^2(1 + \tau)$ à payer.

— en $t = n$ mois on doit

$$P(1 - r)^n(1 + \tau)^n$$

à la banque. On doit payer $r.P(1 - r)^n(1 + \tau)^n$ et il nous restera à payer $P(1 - r)^{n+1}(1 + \tau)^n$.

Au bout de $n$ mois on aura donc payé

$$\sum_{t=0}^{n} r.P(1 - r)^t(1 + \tau)^t = P.r \sum_{t=0}^{n} ((1 - r)(1 + \tau))^t$$

Soit $\alpha = ((1 - r)(1 + \tau))$. Alors

$$\sum_{t=0}^{n} r.P(1 - r)^t(1 + \tau)^t = P.r \sum_{t=0}^{n} \alpha^t = P.r.\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

Pour nous, $\alpha = (1 - 0.02)(1 + 0.013) = 0.993$. Donc

$$= 400 * 0.02 * \frac{1 - (0.993)^{n+1}}{1 - 0.993} \sim 1142 * (1 - (0.993)^n)$$

Comme $(0.993) < 1$, la limite $\lim_{n\to+\infty}(0.993)^n = 0$. Donc

$$= 400 * 0.02 * \frac{1 - (0.993)^{n+1}}{1 - 0.993} \to 1142$$

Donc, on finira par payer 1442€.

**Exemple 4.4.21 (La soupe qui refroidit)**

Nous sommes en retard pour le dîner et la soupe est en train de refroidir à la maison. Soit $T_{env} = 15°$ la température ambiante à la maison et soit $T(t)$ la température de la soupe en fonction du temps ($t$ en minutes) avec $T(0) = 80°C$.

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux de perte de chaleur d'un corps est proportionnel à la différence de température entre le corps et le milieu environnant.

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_{env})$$

Grâce à des expériences passées, on sait qu'au bout de $10$ minutes la soupe est déjà à $40°$ C. Combien de temps on a avant que la soupe atteigne $20°$ C ?

Posons $y(t) = T(t) - T_{env}$. Alors, l'équation en haut est équivalent à

$$\frac{dy}{dt} = ky(t)$$

avec solution $y(t) = C.e^{kt}$. On sait que $y(0) = 80 - 15 = 65 = C$ et que $y(10) = T(10) - 15 = 40 - 15 = 25$. Donc

$$65.e^{10k} = 25$$

d'où

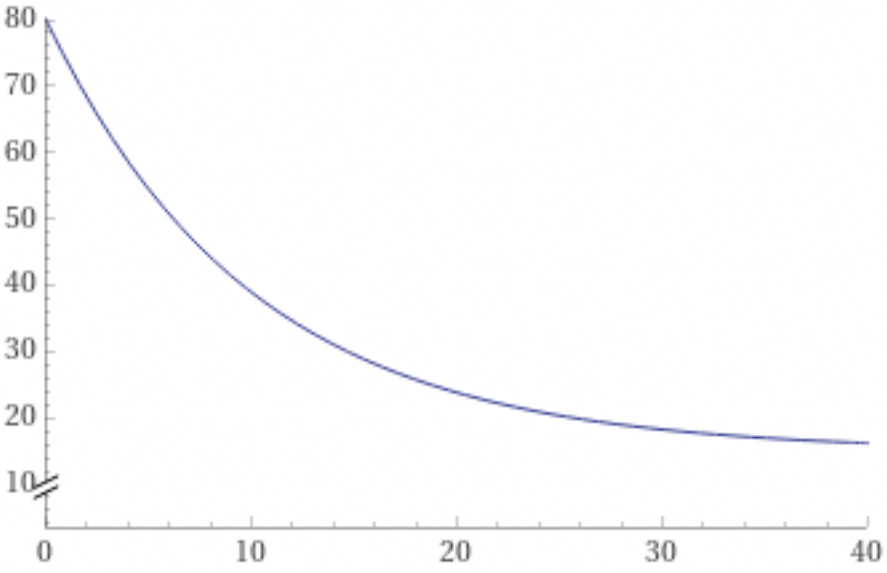
$$k = \frac{\ln(\frac{25}{65})}{10} \sim -0.1$$

Donc,

$$T(t) = 65.e^{-0.1t} + 15$$

| plot | $65\,e^{-0.1\,t} + 15$ | $t = 0$ to $40$ |
|---|---|---|

Plot




Il faut donc résoudre l'équation

$$65.e^{-0.1t} + 15 = 20$$

$$65.e^{-0.1t} = 5$$

$$t = -\frac{\ln(\frac{5}{65})}{0.1} \sim 25\,min$$

## 4.5. Mécanisme de réchauffement climatique par effet de serre.

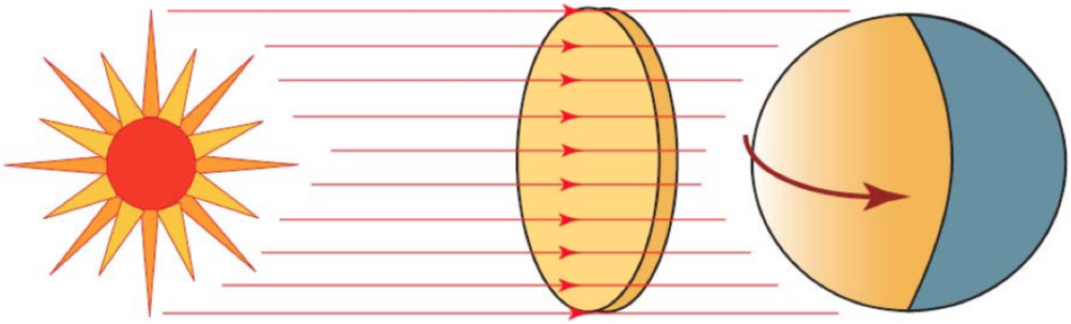
"*Si la quantité d'acide carbonique augmente en progression géométrique, l'augmentation de la température suivra, presque avec une progression arithmétique.*"

Svante Arrhenius, 1896

La Terre reçoit et libère de la chaleur en suivant les principes de la thermodyna-

mique :

— *Énergie reçue*. La source principale d'énergie reçue est le rayonnement solaire, à un rythme de 1360 $W/m^2$. Environ 30% de cette lumière est immédiatement reflétée par des nuages, la neige, etc. Les 70 % restants interceptent la Terre sur un disque projeté d'aire $A = \pi.R^2$ où $R$ est le rayon de la Terre ($6 \times 10^3$) :



Pour une puissance totale $P_{\rightarrow}$ de

$$P_{\rightarrow} := 1360 * 0.7 * \pi * R^2$$

— *Énergie émise*. Le mécanisme par lequel l'énergie quitte la terre est gouverné par la loi de Stefan-Boltzmann

$$P_{\leftarrow} = A_{surf}.\sigma.T^4$$

où $A_{surf}$ est l'aire de la surface de la planète, $\sigma$ est la constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5.6710^{-8}\ W/m^2/K^4$, et $T$ est la température de la surface rayonnante, en Kelvin.

L'équilibre thermique correspond donc à l'équation

$$P_{\rightarrow} = P_{\leftarrow}$$

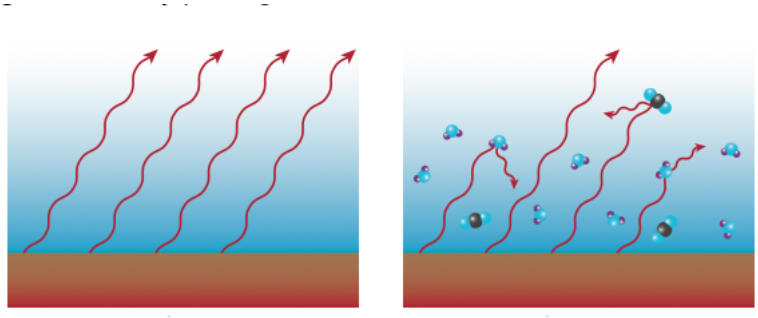
$$1360 * 0.7 * \pi * R^2 = 4\pi.R^2 * \sigma.T^4$$

d'où

$$T = \sqrt[4]{\frac{1360 * 0.7}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1360 * 0.7}{4 \times 5.6710^{-8}}} = 255\,K \sim -18^{\circ}\,C$$

Cela correspond à une différence de $33^{\circ}$ C par rapport à la température moyenne terrestre d'environ $15^{\circ}$ C. Cette différence provient de la présence des gaz à effet de

serre :



**Fait 4.5.1 (Arrhenius)**

$$\Delta T = k.\ln(\frac{[CO_2]}{[CO_2]_{1800}})$$

## 4.6. Croissance économique et les limites physiques

Revenons maintenant aux questions énergie-climat. On se propose ici à analyser la question de couplage entre croissance économique et consommation d'énergie posé par les Exemples 2.1.1, 2.1.3 et 2.1.4 et décrite dans le Problème 2.2.1 :

**Problème 4.6.1**

Est-il raisonnable de supposer qu'au cours des prochains siècles, l'activité économique humaine pourra continuer à croître en même temps que la consommation d'énergie, suivant la même tendance qu'au cours du XXe siècle ?

**Exemple 4.6.2 Cet exercice est tiré de ce livre**

L'idée est de comparer l'activité de l'humanité à une lampe rayonnant de l'énergie avec une puissance croissante dans le temps. Pour cela, prenons la puissance énergétique de l'activité humaine en 2020. D'après la figure dans le Fait 2.1.3, on a consommé environ 160 000 TWh d'energie primaire en 2020. D'après Exemple 4.1.7 cela correspond à $10^{20}$ Joules, donc une puissance de $\frac{10^{20}}{(10^7 \text{ secondes})} = 10^{13}$ Watts. On avait aussi vu que pendant le XXieme siècle ça a augmentée d'environ 2%-3% par an. Pour les effets de calcul on va donc prendre un taux de $2.3\%$ que correspond à un facteur $10$ par siècle (voir Exercice 4.7.3).

La question peut alors être reformulée de la façon suivante : est-il raisonnable

de compter sur une croissance similaire pour les prochains siècles ? Si on pose $t = 0 =$ aujourd'hui et $t$ en siècles, on s'interesse donc à analyser la fonction exponentielle

$$E(t) = 10^{13} * 10^t = 10^{13+t}\ W$$

— Nous avons vu dans la Section 4.5 que la puissance solaire sur l'atmosphere terrestre est de $1300\ W/m^2$ et que seulement 70% de cette énergie arrive en surface, c'est à dire, $10^3\ W/m^2$ interceptent la Terre sur un disque projeté d'aire $A = \pi.R^2$ où $R$ est le rayon de la Terre ($6 \times 10^6$ m). Seulement un quart de la surface de la Terre est couverte. Nous obtenons donc

$$\frac{10^3 \times \pi \times 6^2 \times (10^6)^2}{4} \sim 3 \times 10^{16}\, W$$

Si nous installons des panneaux solaires sur chaque mètre carré de territoire disponible convertissant la lumière du soleil en énergie électrique avec une efficacité de 20 % (le standard commercial d'aujourd'hui), nous conservons donc $6 \times 10^{15} = 6 \times 10^{13+2}$ W.

On constate donc qu'en seulement 2 siècles et demi, si on garde le rythme de 2.3% par an, on aura besoin d'une puissance équivalente à toute la puissance solaire arrivant sur terre.

— Si on couvre aussi les océans avec des panneaux solaires avec une efficacité de 100%, on obtient environ

$$10^3 \times \pi \times 6^2 \times (10^6)^2 \sim 113 \times 10^{15} \sim 10^{17} = 10^{13+4}\, W$$

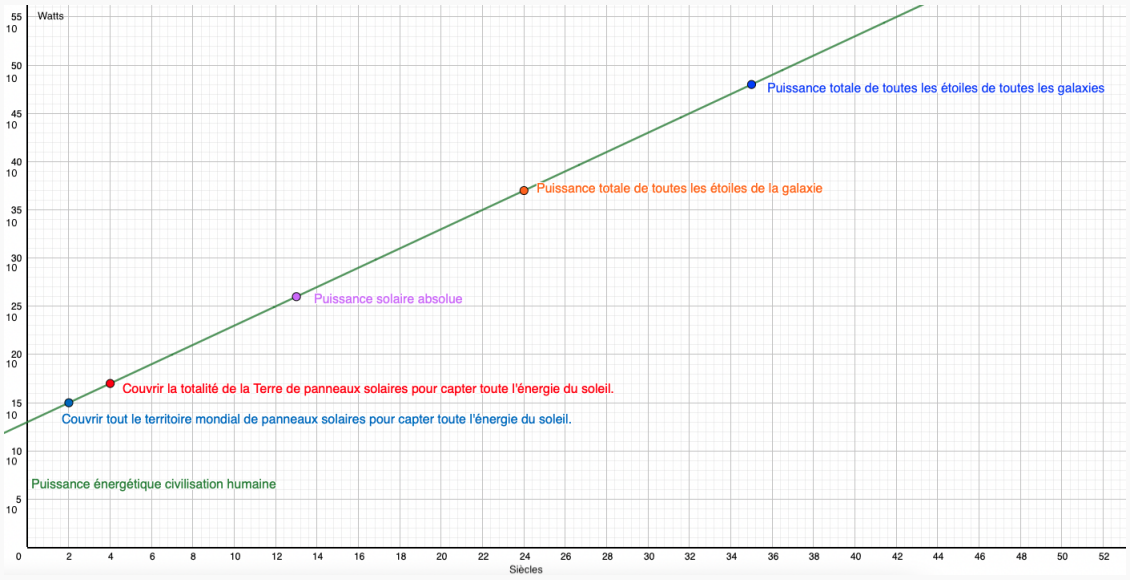
Donc, en seulement 400 ans, avec le rythme de 2.3% par an on aura besoin d'une puissance équivalente à couvrir tout la surface de la planète avec des panneaux solaires.

— Nous pourrions peut-être faire mieux que ça et essayer de construire une sphère de panneaux solaires autour du soleil. La puissance absolue du soleil est d'environ $4 \times 10^{26}$ W. Mais $10^{26} = 10^{13+13}$. Donc en seulement 1300 ans on aurait besoin d'avair toute la puissance énergétique du soleil !

— On peut continuer le raisonnement : dans notre galaxie, il y a environ $10^{11}$ étoiles, donc $10^{11}$ fois la puissance du soleill $10^{11} \times 10^{26} = 10^{37}$ W. Cela correspond à $37 = 13 + 24$ donc seulement 2400 ans !

— Pour finir le raisonnement : il y a environ $10^{11}$ galaxies...on constate donc que, avec une croissance de $2.3\%$ par an, dans moins de 5000 ans, on aurait besoin d'avoir presque toute la puissance énergétique de l'univers....

Voici donc un résumé en échelle logarithmique :




On vient donc de démontrer par l'absurde que on ne pourra pas continuer une croissance de 2.3% par an pendant longtemps. On verra plus tard (Exemple 5.2.6) que l'hypothèse d'une croissance infinie sous la contrainte d'une consommation d'énergie stagnante est également absurde.

**Remarque 4.6.3**

L'Exemple 4.6.2 (et voir aussi l'Exemple 5.2.6 en bas) montre que, à cause des propriétés de la fonction exponentielle, il n'est pas raisonnable d'espérer une croissance économique durable. Cependant, nous sommes devenus tellement dépendants de la croissance économique pour garantir la stabilité de notre civilisation, que nous l'avons même ajoutée comme axiome dans notre constitution européenne:

*Article 3*
(ex Article 2 TEU)

3. The Union shall establish an internal market. It shall work for the sustainable development of Europe based on balanced economic growth and price stability, a highly competitive social market economy, aiming at full employment and social progress, and a high level of protection and improvement of the quality of the environment. It shall promote scientific and technological advance.

## 4.7. Exercices

**Exercice 4.7.1**

Quel est l'ordre de grandeur du nombre de fenêtres sur le campus de la fac ?

**Exercice 4.7.2**

La preuve suivante que $-1 = 1$ contient une erreur. De quoi il s'agit ?
Preuve :

$$(-1) = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

**Exercice 4.7.3**

Quel est le taux de croissance annuel d'une quantité qui augmente d'un facteur 10 par siècle ?

**Exercice 4.7.4**

Un être humain marche linéairement, c'est-à-dire, à chaque pas, il avance d'environ 0.5 mètres. Une autre espèce, l'"homoexponentiel" marche de façon exponentielle : à chaque pas, il double la taille du pas précédent. Comparez les distances parcourues par l'être humain ordinaire et l'exponentielle après 30 pas.

**Exercice 4.7.5**

En 2013, la population de la République démocratique du Congo (capitale Kinshasa) compte environ 63 millions d'habitants. Le taux de croissance annuel de cette population est de $3\%$ . Supposons que ce taux se maintienne dans les années à venir.

1. Calculer la population de ce pays en 2025.
2. Quand le Congo comptera-il 80 millions d'habitants ?
3. Combien d'années faut-il à la population congolaise pour doubler ?

**Exercice 4.7.6**

Une personne souhaite placer 2500 euros sur un compte épargne.

1. Quel doit être le taux d'intérêt annuel si elle veut que son capital atteigne 3000 euros après 5 ans ?
2. Quel doit être le taux d'intérêt annuel si elle veut que le facteur de croissance pour une période de 10 ans soit égal à 1,2 ?

**Exercice 4.7.7**

Montrer que l'exponentielle $e^x$ croît plus vite que n'importe quel polynôme $x^n$ en calculant les limites

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$$

pour tout $n \geq 1$.

A la suite de ce constat,commentez le principe de proportionnalité appliqué à la gestion de la pandemie.

**Exercice 4.7.8**

On reprendre ici le graphique dans Fait 2.1.11 des émissions de $CO_2$ depuis 1850. Cette courbe peut être approximée par une fonction exponentielle $E(t) = 1.5e^{0.02t}$ où $E(t)$ est est le taux d'émission de $CO_2$, par an et et $t$ est le nombre d'années depuis 1800. Calculer la quantité totale de $CO_2$ émise depuis 1800 et comparer avec les données.

5

# Équations différentielles et modélisation de systèmes sócio-écologiques

Tous les modèles sont des fragments extrêmement simplifiés de la réalité. Mais ce n'est pas une raison pour les écarter dans la mesure où ils nous permettent d'évaluer des risques systémiques.

## 5.1. Premiers exemples : modèle exponentiel

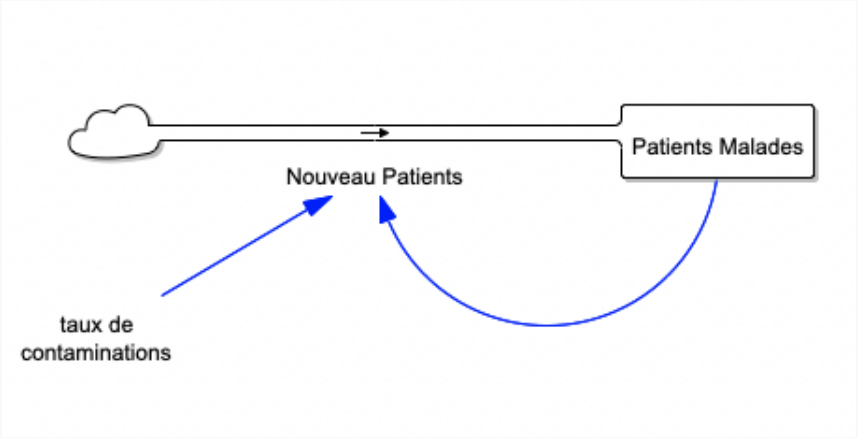
On commence par reprendre quelques exemples du chapitre précédent.

**Exemple 5.1.1**

Le modèle le plus simple d'une épidémie c'est le modèle de l'équation différentiel étudié dans l'Exemple 4.4.12

$$\frac{d\,N(t)}{dt} = \ln(1.1) * N(t)$$

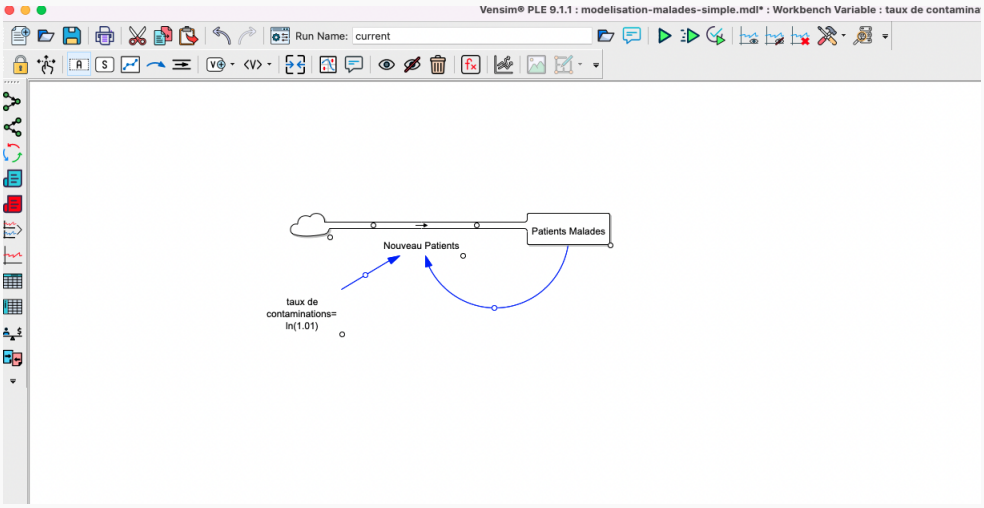
On a vu qu'une façon équivalent d'exprimer l'équation différentielle c'est par un schéma de rétroaction :




Pour un système si simple, la solution est connue, donnée par $N(t) = N_0.(1.1)^t = N_0.e^{\ln(1.1)*t}$ avec $N_0$ la quantité initiale de malades et $t$ en semaines.

Par exemple, le temps de doublement est d'environ 7 semaines.

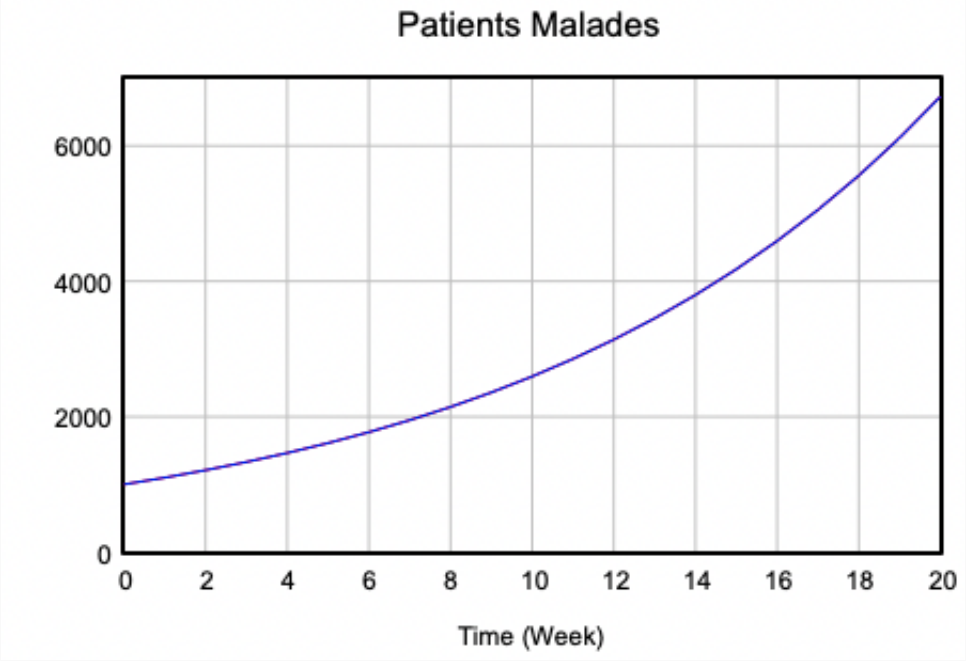
Pour des systèmes plus compliqués, c'est difficile de trouver la formule exacte pour la solution. Ici, nous avons réussi grâce à la méthode d'Euler dans la preuve du Théorème 4.4.6 en découpant le temps par des intervalles de plus en plus petits. Ce que nous allons faire dans ce chapitre c'est de laisser l'ordinateur faire cette subdivision et produire une solution numérique. Pour ça on utilise le logiciel VenSim que nous permet d'introduire des schémas comme ci-dessus :




Voici notre première simulation avec les paramètres suivants

$$N_0 = 1000$$

taux de contaminations $=10\%$ par semaine $= \ln(1.1)$

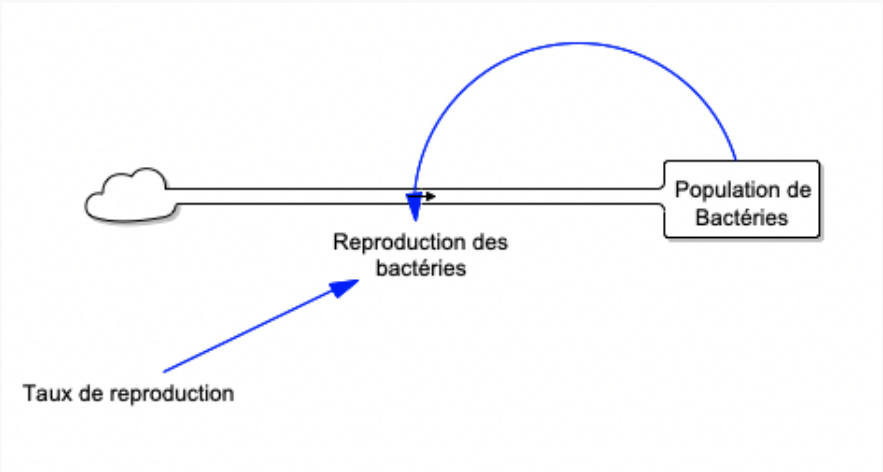


**Guide 5.1.2**

Pour faire nos modélisations, nous utilisons le logiciel VenSim que vous pouvez télécharger gratuitement ici. Ce logiciel permet de représenter une équation différentielle par son schéma de rétroactions comme dans l'Exemple 5.1.1. Voici un lien qu'explique le dictionnaire utilisé et un tutoriel :

**Exemple 5.1.3 Population de Bactéries**

On reprendre ici l'Exemple 4.4.14 avec une population de bactéries donnée par le modèle



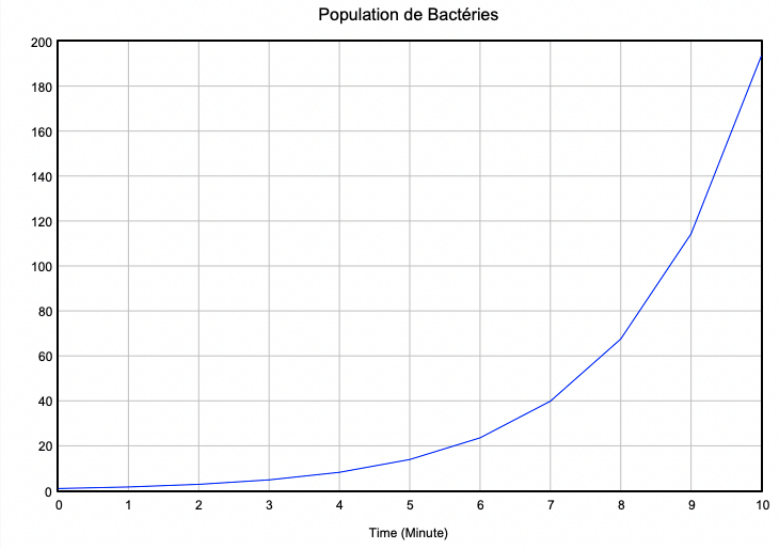

associé à l'équation différentielle

$$\frac{d\,P(t)}{dt} = \ln(2) * P(t)$$

Voici notre deuxième solution numérique, avec les paramètres suivantes :

$$P(0) = 1$$

taux de reproduction par minute = $\ln(2)$

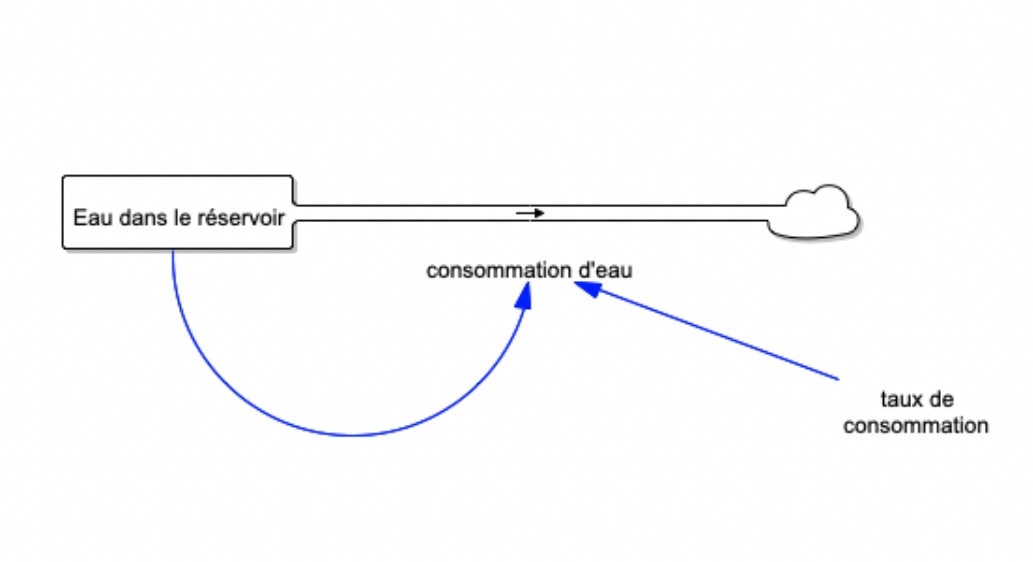



**Exemple 5.1.4**

On reprendre ici l'Exemple 4.4.18, avec l'équation

$$\frac{dL}{dt} = -0.03 * L(t)$$

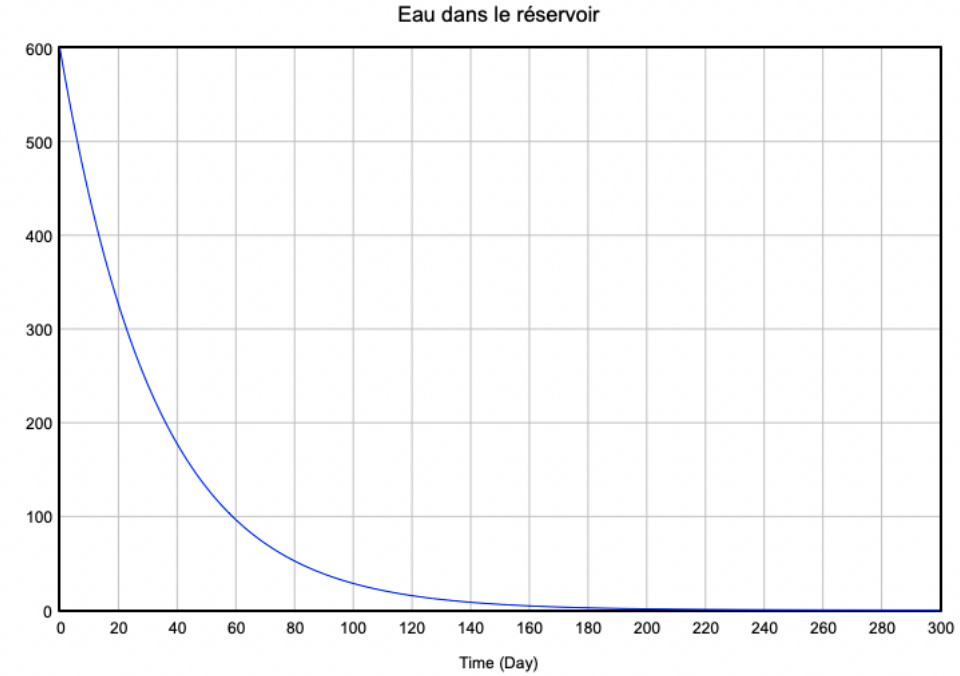
que corresponde à une boucle de rétroaction de la forme




Voici notre deuxième solution numérique, avec les paramètres suivantes :

$$L(0) = 600$$

taux de consommation =$0.03$




**Exemple 5.1.5 Population**

Considérons maintenant un modèle plus réaliste pour une population de bactéries. Si c'est vrai que le nombre total de naissances dépend du total de population à un moment donné, c'est aussi le cas pour le nombre de décès. Considérons une équation différentielle qui prend en compte les décès. On prendre l'équation de l'Exemple 5.1.3

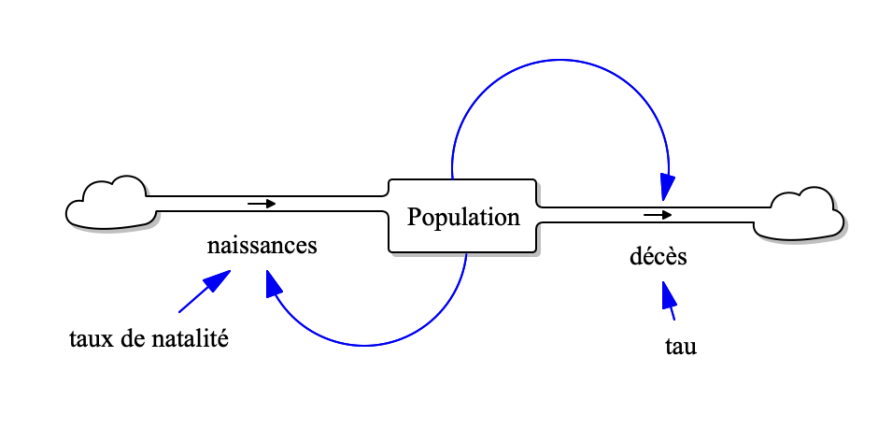
$$\frac{d\,P(t)}{dt} = \ln(2) * P(t)$$

et on la modifie pour prendre en compte les décès :

$$\frac{d\,P(t)}{dt} = +\ln(2) * P(t) - \tau * P(t)$$

avec $\tau$ le taux de mortalité. Comme dans la Définition 4.4.17, $\tau = \frac{1}{\lambda}$ avec $\lambda$ la durée de vie moyenne d'une bactérie.

Le résultat est donc une combinaison des Exemple 5.1.3 et Exemple 5.1.4 : un taux positif $(+\ln(2))$ pour prendre en compte la reproduction et un taux négatif $(-\tau)$ pour prendre en compte les décès. Le schéma de rétroaction est donc une combinaison aussi des exemples Exemple 5.1.3 et Exemple 5.1.4 :




En fonction de la valeur de $\tau$, le système présentera des caractéristiques différentes. En effet, l'équation différentielle du système peut s'écrire comme

$$\frac{d\,P(t)}{dt} = +\ln(2) * P(t) - \tau * P(t) = (\ln(2) - \tau) * P(t)$$

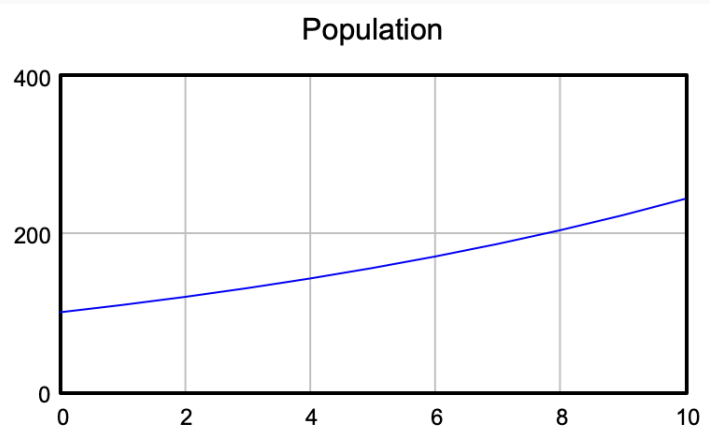
— Si $(\ln 2 - \tau) > 0$, le système est donc équivalent au système de l'Exemple 5.1.1.

— Par contre si $(\ln 2 - \tau) < 0$, le système est équivalent à celui de l'Exemple 5.1.4.

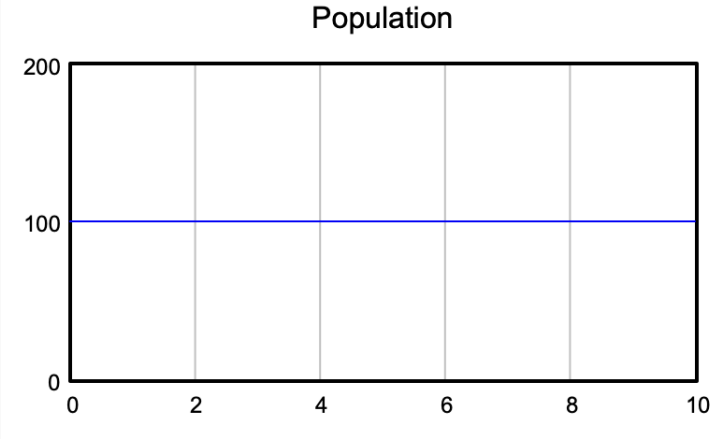
— Finalement, si $(\ln 2 - \tau) = 0$, a on l'équation $P'(t) = 0$ donc $P(t)$ est constante.

Voici les résultats pour une population initiale de $100$ bactéries :

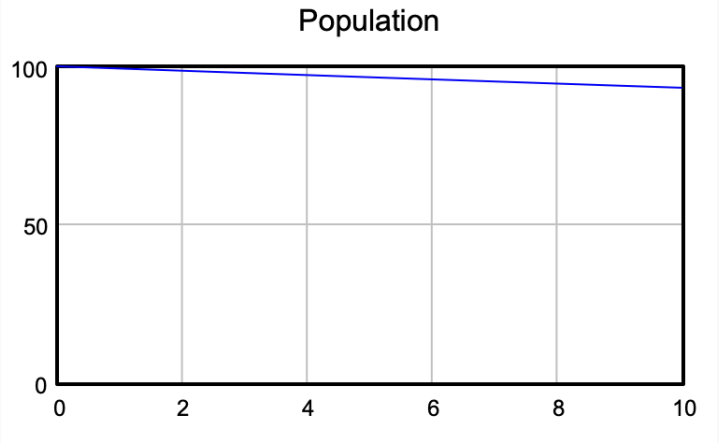
— $\tau = 0.6$ (durée de vie moyenne de 1.66 min) :




— $\tau = \ln(2)$ (durée de vie moyenne de 1.44 min) :




— $\tau = 0.7$ (durée de vie moyenne de 1.42 min) :




## 5.2. Modèle Logistique

On cherche maintenant à modifier le modèle exponentiel de la section précédente pour le rendre plus réaliste.

**Exemple 5.2.1**

Prenons le modèle de croissance exponentielle de l'Exemple 5.1.3.

$$\frac{dP}{dt} = \ln(2).P(t)$$

dont on connait la solution : $P(t) = e^{\ln(2)t}.P_0$.

Si on veut un modèle plus réaliste, il faut modifier l'équation car on sait que dans le monde réel, une population ne peut pas croître indéfiniment. Par exemple,

le taux de croissance va diminuer au fur et à mesure que la nourriture devient moins disponible. Une façon de modéliser cette situation est de considérer une nouvelle équation

$$\frac{dP}{dt} = \ln(2)(1 - \frac{P(t)}{K}).P(t)$$

où $K > P_0 > 0$ est un seuil de population. À chaque itération, le ratio $N(t)/K$ compare le niveau de population actuel avec le seuil $K$. La différence $1-N(t)/K$ oscille entre $0$ et $1$ ($1$ étant très éloigné du niveau maximal, $0$ très proche du seuil). Au fur et à mesure que $1 - N(t)/K$ devient de plus en plus petit, il commence à modifier le taux de croissance $ln(2)$.

Si on pose

$$\alpha(t) = \ln(2)(1 - \frac{P(t)}{K})$$

l'équation peut donc s'écire comme

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(t).P(t)$$

et on peut penser à $\alpha(t)$ comme un taux de croissance qui dépend de $N(t)$.

**Définition 5.2.2**

L'équation différentielle de la forme

$$\frac{dP}{dt} = c(1 - \frac{P(t)}{K}).P(t)$$

pour $c, K > P_0 > dou0$, s'appelle l'équation logistique. La constante $K$ c'est le seuil.

**Proposition 5.2.3**

La fonction $P(t) = \frac{P_0.e^{ct}}{(1+\frac{P_0}{K}e^{ct})}$ est solution de l'équation logistique avec condition initiale $P(0) = P_0$.

*Démonstration.*

$$\frac{P_0.e^{ct}}{(1 + \frac{P_0}{K}e^{ct})} = \frac{P_0}{e^{-ct} + \frac{P_0}{K}} = P_0 * (e^{-ct} + \frac{P_0}{K})^{-1}$$

Donc

$$(P_0 * (e^{-ct} + \frac{P_0}{K})^{-1})' = P_0 * (-1) * (e^{-ct} + \frac{P_0}{K})^{-2} * (-c) * e^{-ct}$$

$$= P(t) * (e^{-ct} + \frac{P_0}{K})^{-1} * (-c) * e^{-ct} = \frac{c * P(t)}{1 + \frac{P_0}{K} * e^{ct}}$$

Il suffit donc de vérifier que

$$\frac{1}{1 + \frac{P_0}{K} * e^{ct}} = (1 - \frac{P(t)}{K})$$

En effet :

$$(1 - \frac{P(t)}{K}) = (1 - \frac{P_0.e^{ct}}{(1 + \frac{P_0.}{K}e^{ct}) * K}) = \frac{(1 + \frac{P_0.}{K}e^{ct}) * K - P_0.e^{ct}}{(1 + \frac{P_0.}{K}e^{ct}) * K} =$$

$$= \frac{K}{(1 + \frac{P_0.}{K}e^{ct}) * K} = \frac{1}{1 + \frac{P_0}{K} * e^{ct}}$$

□

**Exemple 5.2.4**

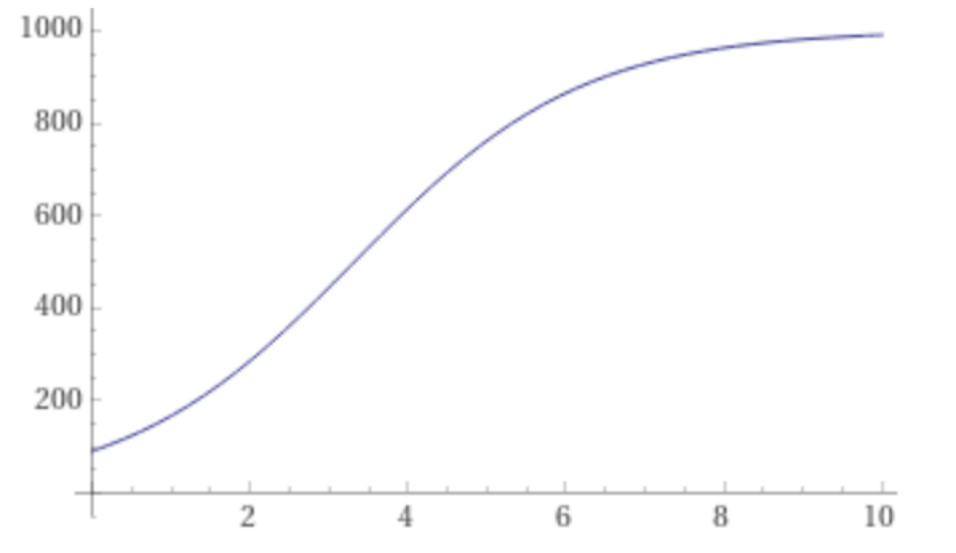
Revenons à l'Exemple 5.2.1. avec une population de bactéries qui double chaque minute avec une population initiale $P(0) = 100$. On considère un seuil de $K = 1000$ bactéries. L'équation logistique est donc donnée par

$$\frac{dP}{dt} = \ln(2)(1 - \frac{P(t)}{1000}) * P(t)$$

avec une solution

$$P(t) = \frac{100.e^{\ln(2)t}}{(1 + \frac{100}{1000}e^{\ln(2)t})}$$

pour la condition initiale $P(0) = 100$.
Voici le graphe $P(t)$ :




On observe que contrairement au cas exponentiel, ici la population va augmenter jusqu'à atteindre le seuil puis se stabiliser.

**Remarque 5.2.5**

Prenons la solution du modèle logistique de la Proposition 5.2.3

$$P(t) = \frac{P_0.e^{ct}}{(1 + \frac{P_0}{K}e^{ct})} = \frac{P_0}{e^{-ct} + \frac{P_0}{K}}$$

Alors, comme l'Exemple 5.2.4 le suggère, on a

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{P_0}{e^{-ct} + \frac{P_0}{K}} = \frac{P_0}{0 + \frac{P_0}{K}} = K$$

grâce à la Remarque 4.2.18.

Revenons à la discussion de la Section 4.6 :

**Exemple 5.2.6 Découplage énergie-PIB - croissance infinie dans un monde fini - Voir ici - §2.3**

Dans la production annuelle de richesse - $P_{ib}$ - il y a toujours une partie qui dépend des flux physiques et de la consommation d'énergie - $P_{ib,en}$. Par définition, on a donc chaque année

$$\frac{P_{ib,en}(t)}{P_{ib}(t)} \leq 1$$

Nous avons vu dans Fait 2.1.1, Fait 2.1.3 et Fait 2.1.4 que tous les deux ont augmentée de façon exponentielle depuis un siècle. On suppose ici un rythme de 2.3% par an en moyenne comme dans l'Exemple 4.6.2. La conclusion c'est donc que

$$P_{ib}(t) = P_{ib,1900} * 10^t$$

$$P_{ib,en}(t) = P_{ib,en,1900} * 10^t$$

avec $t$ en siècles. En particulier, le ratio

$$\frac{P_{ib,en}(t)}{P_{ib}(t)}$$

est à peu près constant depuis un siècle.

La question de découplage énergie-PIB, c'est de savoir si l'on peut garder la croissance économique et en même temps, diminuer la partie physique du $PIB$.

Imaginons donc un scénario où :

— On réussie une transition des ressources non-renouvelables vers des ressources renouvelables et nous retrouvons un modèle soutenable où la partie physique $P_{ib,en}(t)$ commence à suivre un modèle logistique (Exemple 5.2.4) à seuil $K$. Alors, par la Remarque 5.2.5, on aurait que la limite $\lim_{t\to+\infty} P_{ib,en}(t)$ existe et est égale à $K$ ;

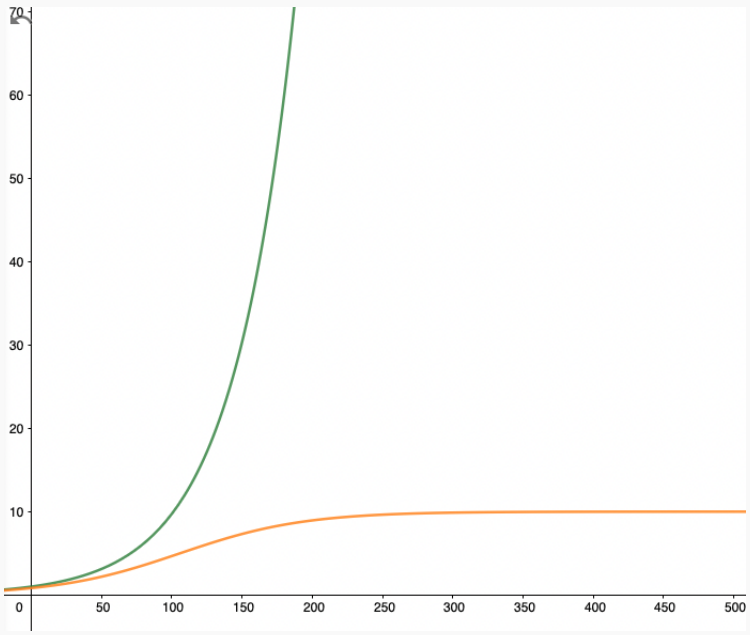
— en même temps on garde la croissance économique de 2.3% par an (croissance infinie).

Par l'Exercice 3.9.13 et la Remarque 4.2.18, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{P_{ib,en}(t)}{P_{ib}(t)} = \left(\lim_{t\to+\infty} P_{ib,en}(t)\right) . \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{P_{ib}(t)}\right) =$$

$$= K. \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{P_{ib,1900} * 10^t}\right) = K. \left(\lim_{t\to+\infty} P_{ib,1900}^{-1} * 10^{-t}\right) = K.0 = 0$$

Cela veut dire que toute la partie de l'économie qui participe avec des flux physiques, devient sans importance pour la production de richesse. Une autre façon de dire, gratuit. C'est donc une démonstration par l'absurde qu'une découplage absolue est impossible si la croissance exponentielle (de n'importe quel taux par an !) se poursuit indéfiniment.




Pour conclure cette section, nous allons décrire un schéma de rétroaction pour l'équation logistique :

**Exemple 5.2.7**

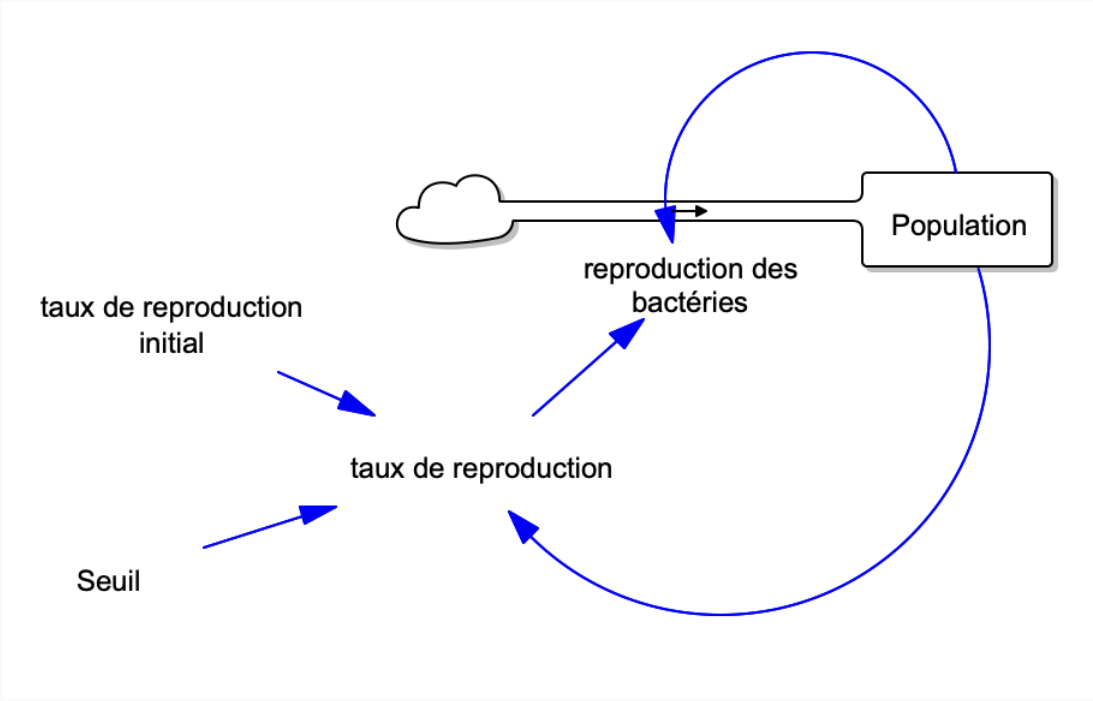
Comme on l'a vu à la fin de l'Exemple 5.2.1, le modèle logistique est une modification du modèle exponentiel, avec une équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(t).P(t)$$

avec

$$\alpha(t) = \ln(2)(1 - \frac{P(t)}{K})$$

On peut donc obtenir le schéma correspondant à partir d'une modification de l'exponentiel. Voici :




où

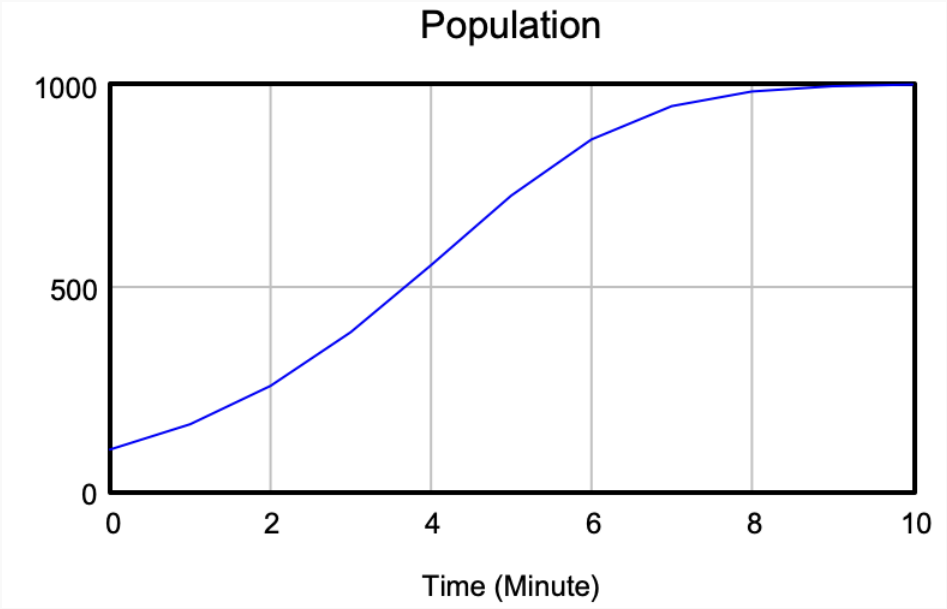
$$\text{taux de reproduction intial } = \ln(2)$$

$$\text{seuil} = K = 1000$$

et le taux de reproduction dépend aussi de la population, donnée par

$$\text{taux de reproduction} = \alpha(t) = \ln(2)(1 - \frac{P(t)}{K})$$

Voici le résultat d'une simulation pour $P_0 = 100$ :




**Exemple 5.2.8 Population de Cerfs**

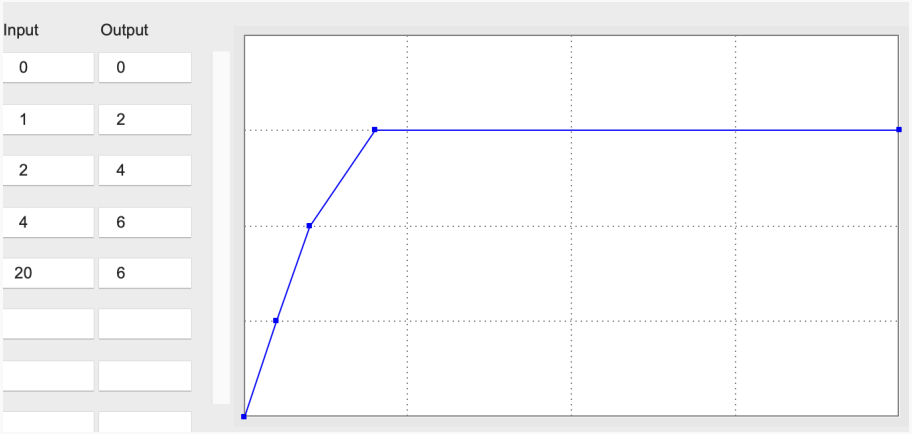
On considère l'évolution d'une population de 5000 cerfs sur un terrain de 1 000 000 acres entre 1900 et 1950. On considère une population de 500 prédateurs.

Dans ce modèle, nous considérons que la population de cerfs se reproduit à un taux de 20% par an. En revanche, le taux de mortalité dépend directement du contact avec les prédateurs. Plus il y a de cerfs, plus les prédateurs ont de chances de les trouver.

Voici donc notre modèle. Si $P_{Cerfs}(t)$ est la population de cerfs à l'instant $t$, on a

$$\rho(t) := \frac{P_{Cerfs}(t)}{1000000}$$

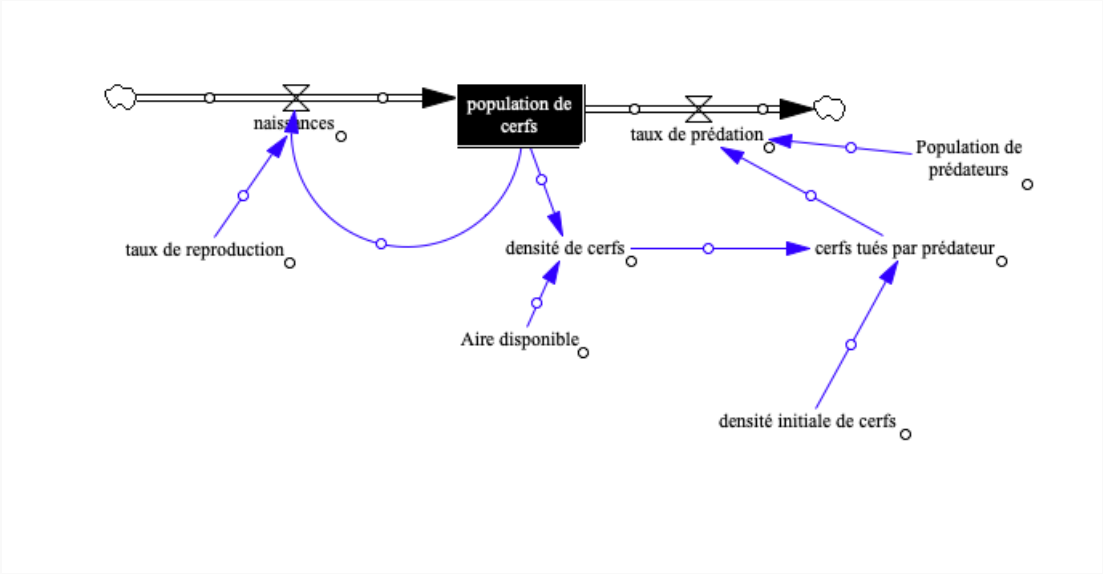
la densité de cerfs à l'instant $t$. En fonction de $\rho(t)/\rho(0)$, il aura plus ou moins contacts avec les prédateurs. On considère donc une fonction $\alpha(t) =$ "cerfs tués par un prédateur par an" affine par morceaux, en fonction de $\rho(t)/\rho(0)$ :



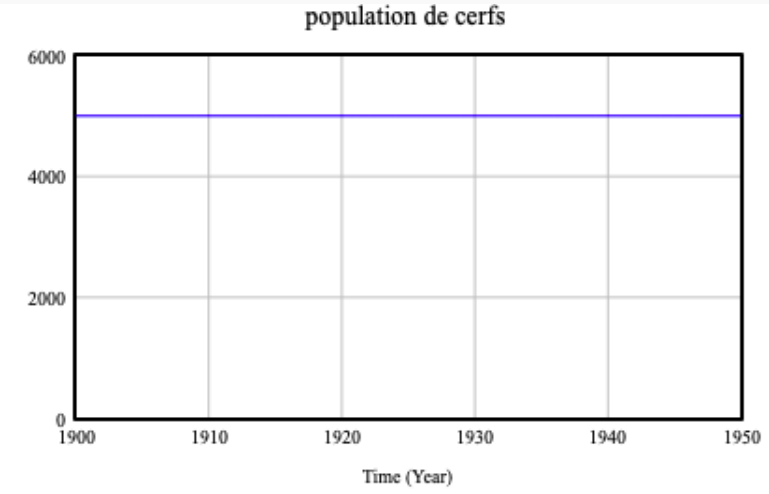

Finalement, on pose

$$\frac{dP_{Cerfs}}{dt} = +\ln(1.2).P_{Cerfs}(t) - \alpha(t) * 500$$

Voici le diagramme associé




et voici le résultat de la modélisation : la population de cerfs est restée stable

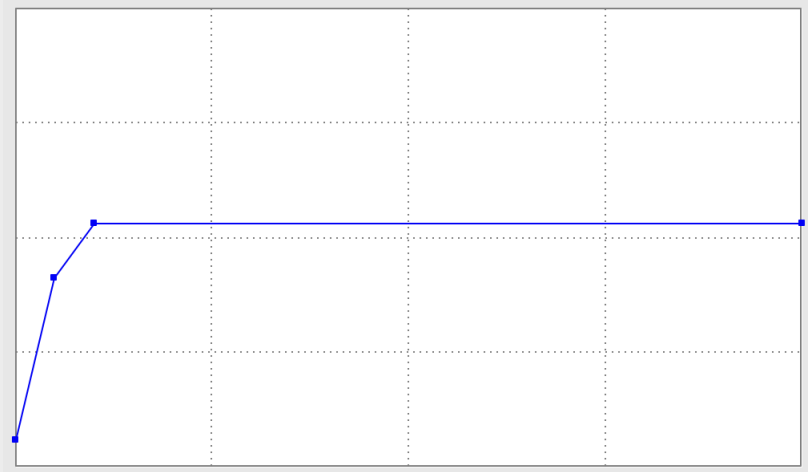



Nous pouvons rendre ce modèle légèrement plus réaliste, en rendant le facteur de croissance $(\ln(2))$ une fonction de la quantité de nourriture disponible. Par exemple, posons N=100 000 une constante pour indique la nourriture disponible et

$$\sigma(t) = \frac{N}{P_{Cerfs}(t)}$$

Considérons le ratio $\sigma(t)/\sigma(0)$ et comme pour le cas précédent, une fonction affine par morceaux $\beta(\sigma) =$ "facteur de reproduction en fonction de la nourriture disponible"

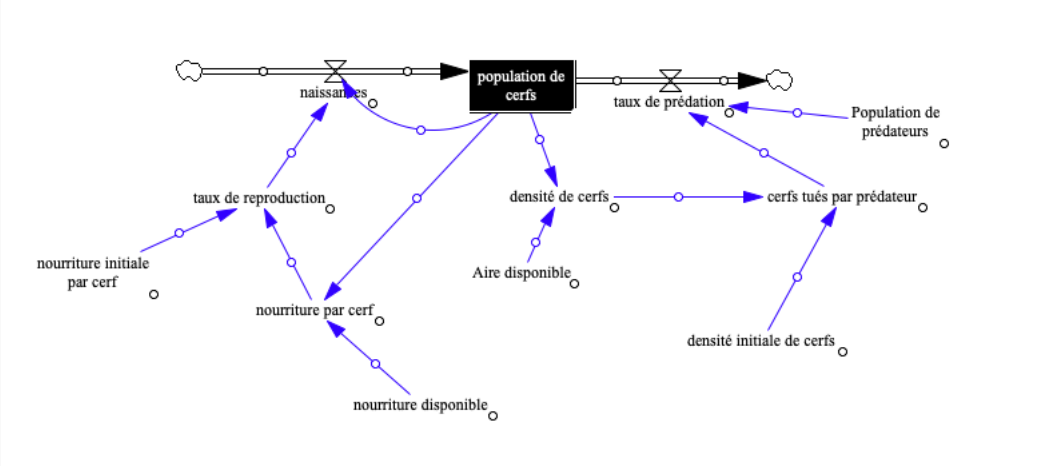
| Input | Output |
|---|---|
| 0 | -0.6 |
| 0.05 | 0 |
| 0.1 | 0.2 |
| 1 | 0.2 |



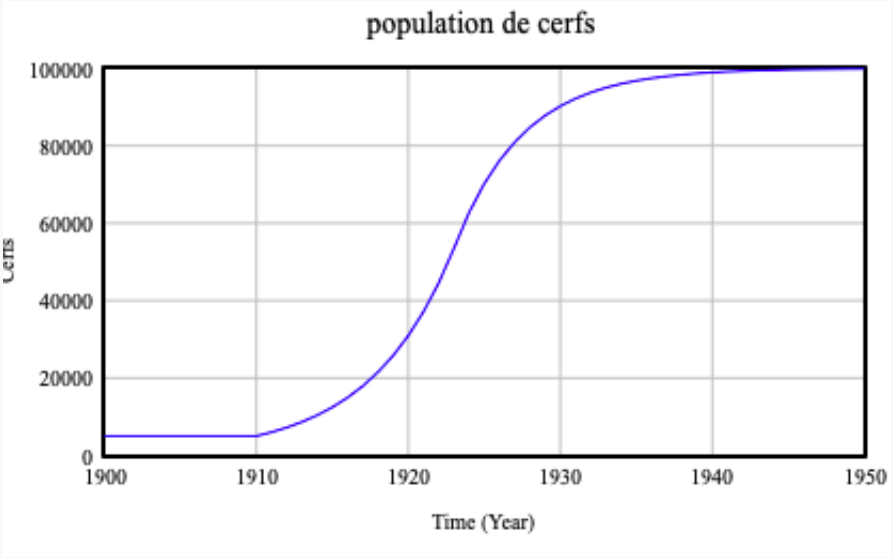
Finalement, on pose

$$\frac{dP_{Cerfs}}{dt} = +\beta(t) * P_{Cerfs}(t) - \alpha(t) * 500$$

Voici le diagramme associé




et le résultat :




## 5.3. Systèmes avec délai de réponse

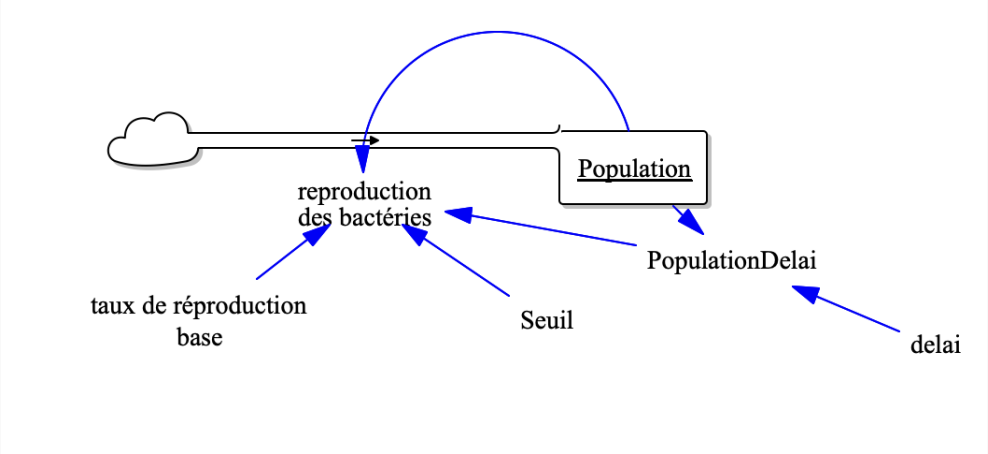
On reprendre le modèle logistique de l'Exemple 5.2.7.

**Exemple 5.3.1**

Dans le modèle logistique, à chaque itération, la population de bactéries est comparée au seuil par le ratio $P(t)/K$. Cela suppose que la comparaison soit instantanée. Que se passe-t-il si les bactéries sont paresseuses ou ont une vision à court terme et réagissent trop lentement ? Une façon de modifier le modèle logistique pour prendre en compte un délai de réponse $\tau$ c'est de considérer l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = \ln(2)(1 - \frac{P(t-\tau)}{K}).P(t)$$

où la comparaison à $K$ est effectué avec un délai de $\tau$ unités de temps. Voici donc le diagramme du système :

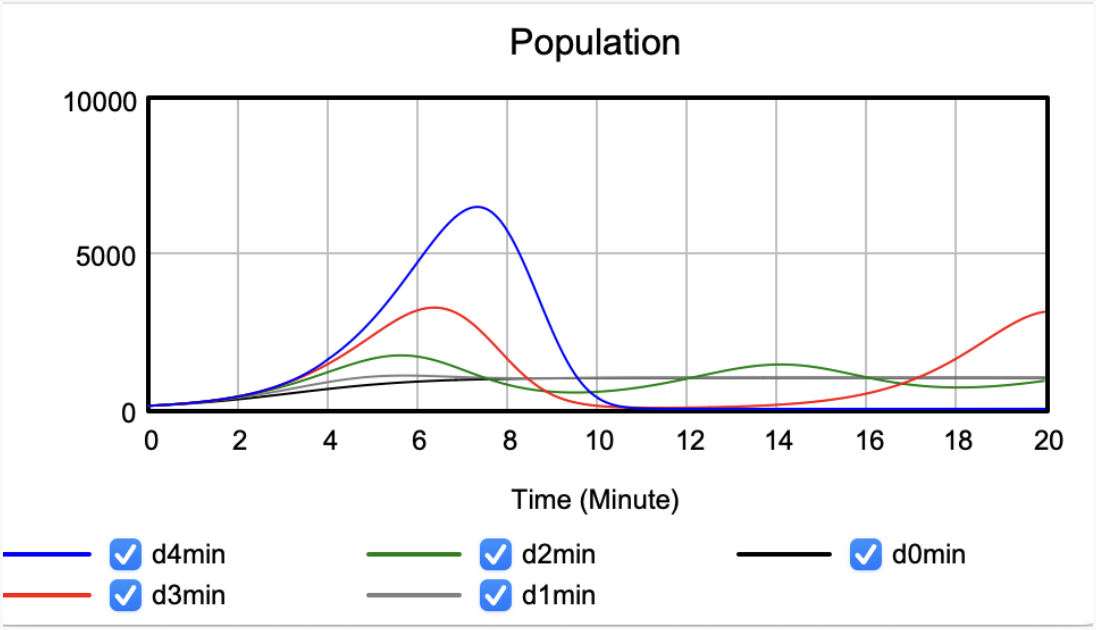



Sur *VenSim*, la function $P(t-\tau)$ est définie avec la fonction

DELAY FIXED ($P(t)$, $\tau$, 0)

Note : Le délai minimal est de TIME STEP et un délai inférieur aura le même effet qu'un délai de TIME STEP.

Voici le résultat pour quelques valeurs de $\tau$ :



On voit que plus le délai de réponse est important, plus il y a de chances que les bactéries n'atteignent pas le seuil de stabilité.

— pour un délai de 1 minute, le système s'adapte très rapidement et atteint le seuil ;

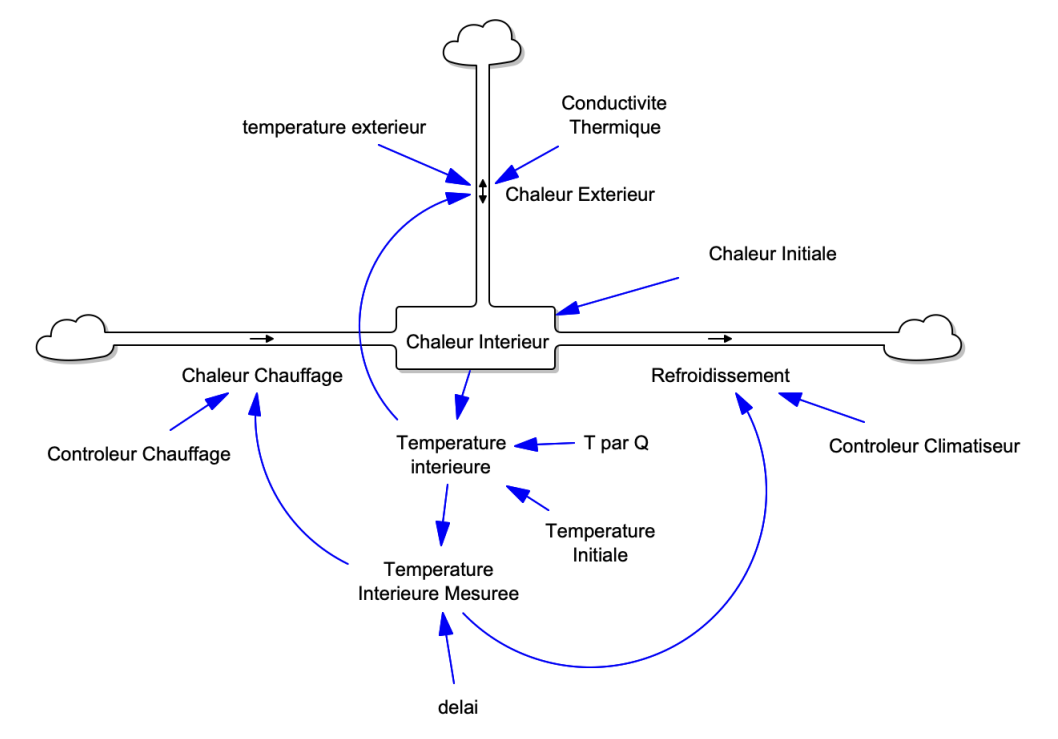
— Pour un délai de 2-3 minutes, le système va avoir un comportement périodique - d'abord il essaie d'atteindre le niveau optimal, mais à cause du retard dans la lecture du seuil, il va le dépasser et ensuite, parce qu'il l'a trop dépassé, il va s'effondrer. Une fois qu'il atteint à nouveau un niveau soutenable, la dynamique recommence.

— Dans le cas d'un délai de réponse de 4 minutes, le système s'effondre.

**Remarque 5.3.2**

L'Exemple 5.3.1 montre que plus nous tardons à agir et à amener le système à un niveau soutenable, plus le risque d'effondrement augmente.

**Exemple 5.3.3 Système de chauffage**




— Température initiale dans la pièce - $24°$ C

— Température d'activation du climatiseur - $27°$ C. Si température de la pièce est inférieure à $27°$ C, le climatiseur est désactivé. Si la température dépasse $27°$, le climatiseur s'active et extrait 100 000 joules par heure.

— Température d'activation du système de chauffage - $20°$ C. Si température de la pièce est supérieure à $20°$ C, le climatiseur est désactivé. Sinon, le système de chauffage s'active et pompe 100 000 joules par heure.

— L'echange de chaleur avec l'extérieur est donnée par

$$\Delta Q = c.(\text{ Température Exterieure - Température Intérieure})$$

où $c = 1000$ J/heure/degrée est la conductivité thermique du bâtiment.

— Température Extérieure : $33°$ C.

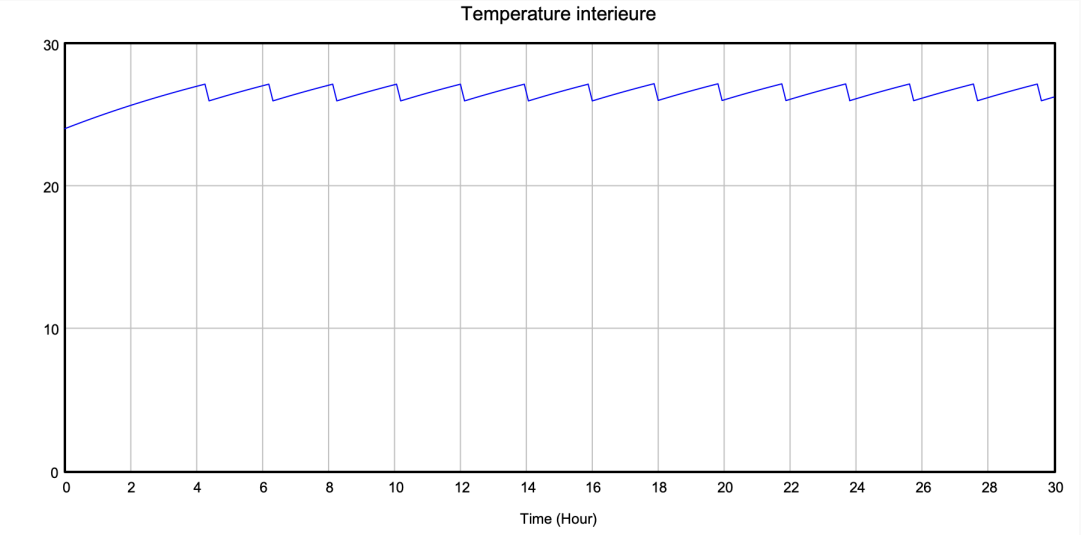
— Délai : 0.2 heures.

— Le ratio $T/Q$ est de 10 000.

— Chaleur Initiale =0.

— La température à l'interieur est donnée par la formule

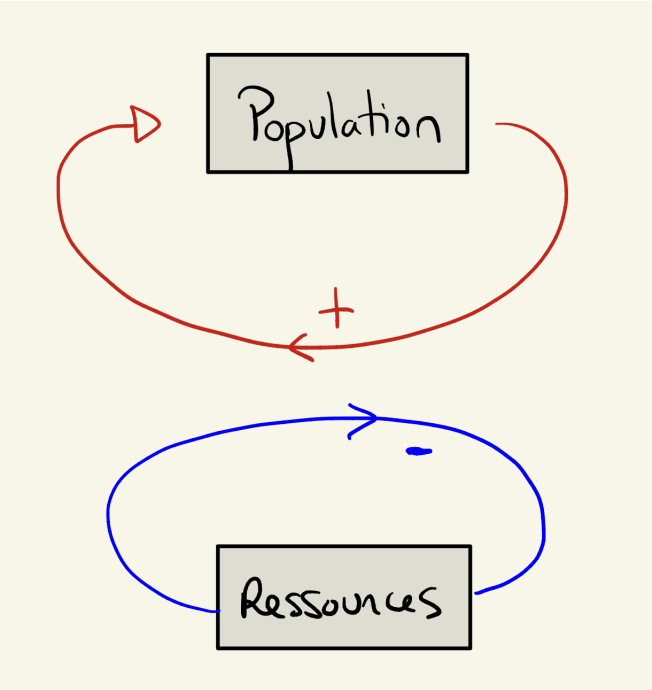
$$T = \text{Chaleur Intérieur}/(T/Q) + 24°$$




## 5.4. Modèles population - ressources finies

En réalité, la croissance exponentielle ne peut pas se produire indéfiniment en raison de contraintes physiques. Pour rendre les Exemples 5.1.3, 5.1.5, 5.2.7 et 5.3.1 encore plus réalistes, il faut tenir compte du fait qu'une population ne croît pas à l'infini sans avoir besoin de consommer certaines ressources - nourriture, pétrole, etc.

Dans l'exemple suivant, la contrainte physique est une autre boucle de rétroaction fonctionnant en contre-cycle : l'exponentielle de l'épuisement des ressources.




Le bilan final est le résultat de la lutte entre ces deux régimes :

**Exemple 5.4.1**

On reprendre ici les Exemples 5.1.3, 5.1.5, 5.2.7 et 5.3.1 d'une population de bactéries mais on ajoute une nouvelle variable - la quantité de nourriture/ressources disponible. On considère :

— $P(t)$ la population de bactéries à l'instant $t$.

— $R(t)$ la quantité de nourriture disponible à l'instant $t$, avec $R_0$ la quantité disponible au départ.

On considère un système avec deux équations. L'équation pour la population de bactéries est une modification de l'Exemple 5.1.5. La seule différence c'est que

maintenant le taux de natalité $\alpha$ des bactéries est une fonction de la quantité de nourriture disponible. Plus précisément, on pose

$$\frac{dP}{dt} = +\alpha P - \tau.P$$

avec $\tau$ de taux de décès et

$$\alpha = a.R$$

où $a$ est une constante. Plus il y a de nourriture disponible, plus il aura de reproduction de bactéries.

De la même façon, on aura aussi une équation pour modéliser l'évolution de la quantité de ressources disponibles :

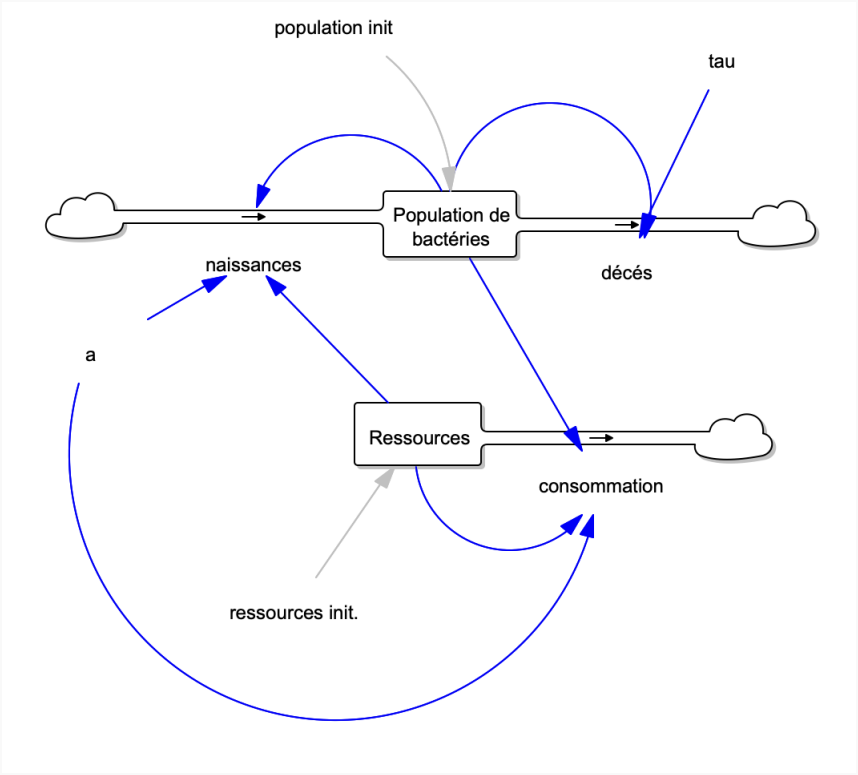
$$\frac{dR}{dt} = -a.P.R$$

dans le sens où les ressources vont disparaitre dans la mesure où elles vont être consommées.

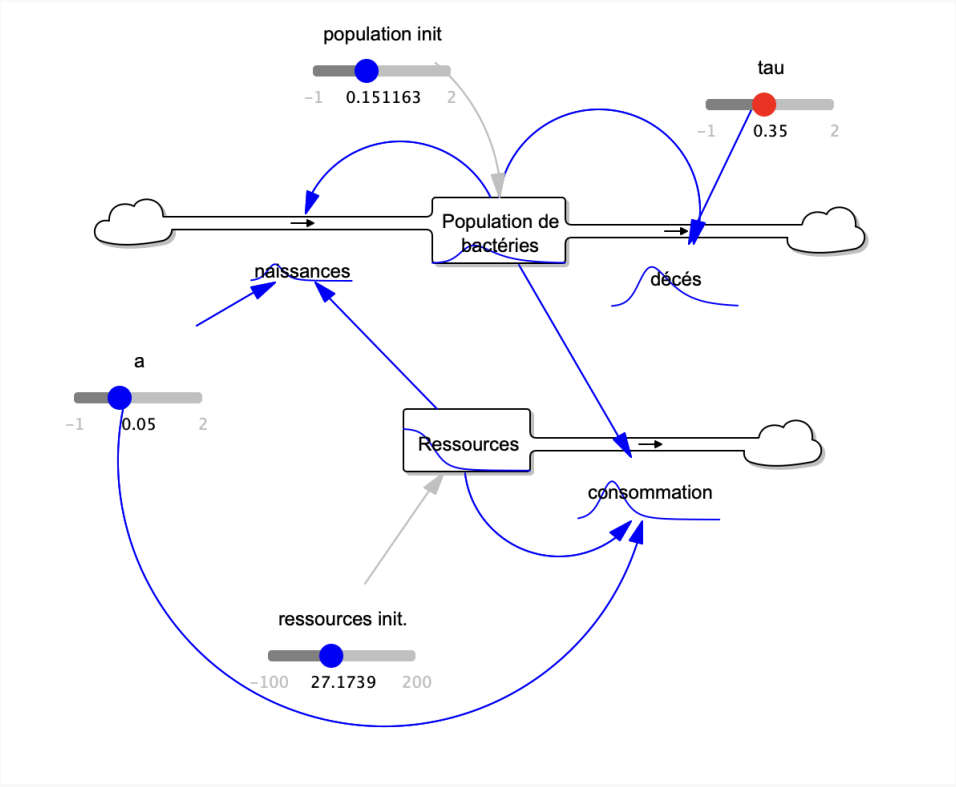
Finalement, notre modèle à deux équations est donnée par le système d'équations

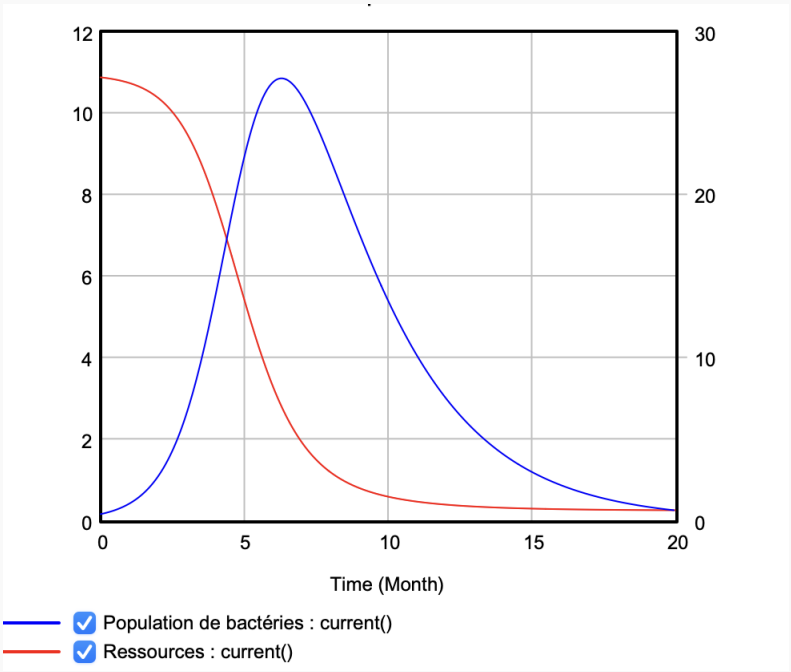
$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = +aR.P - \tau.P \\ \frac{dR}{dt} = -aR.P \end{cases}$$

Le schéma correspondant est donnée par




Voici donc le résultat pour une simulation :



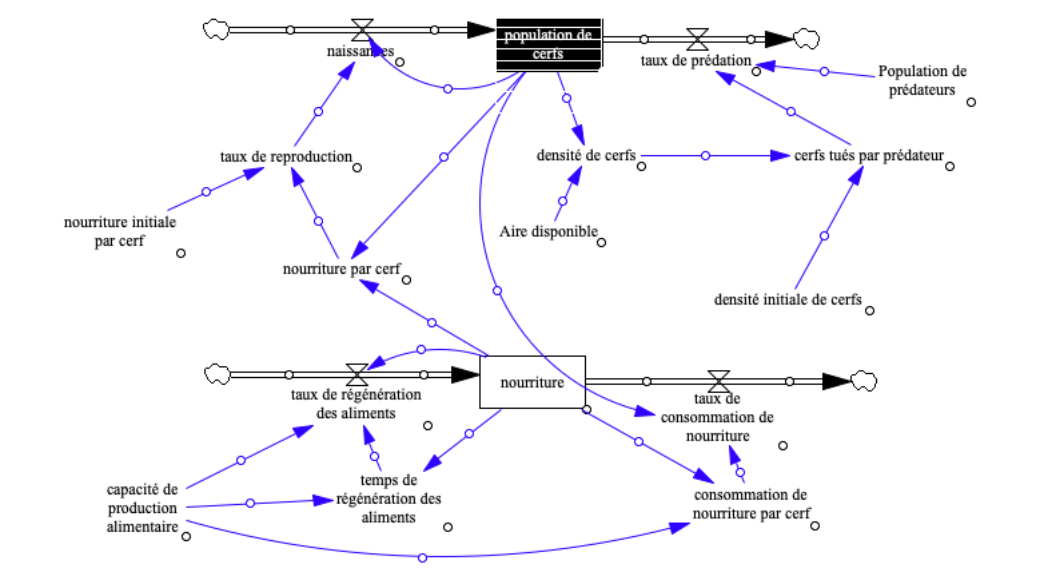


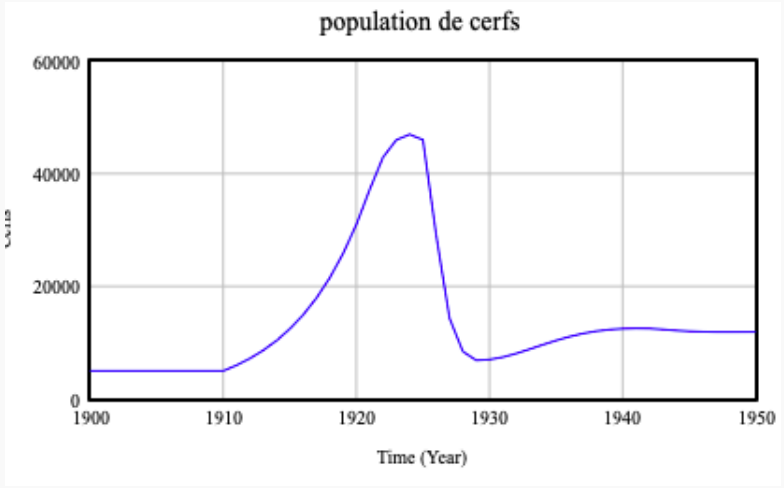

Lorsque qu'elles ont fini de manger toutes les ressources, la population s'effondre.

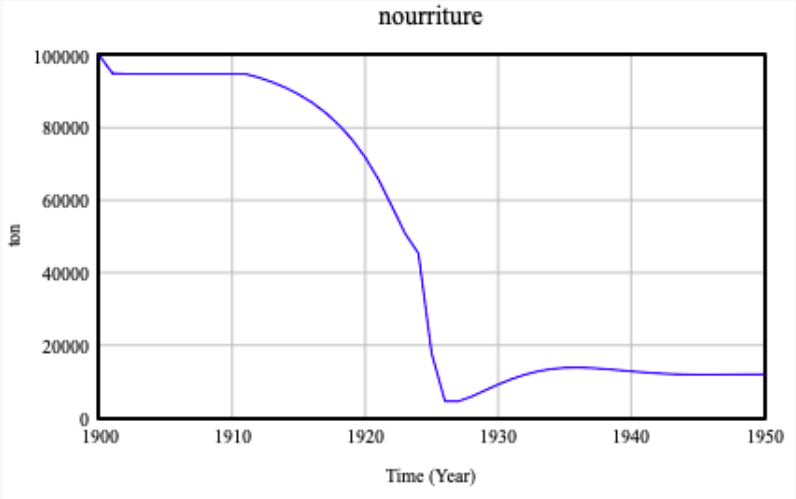
**Exemple 5.4.2 Population de Cerfs 3**

With collapse because they eat all their food

Here we have two variables - one is population the other is the quantity of food. In this case there are two differential equations with parameters related, one for food and one for population.


population de cerfs
naissances
taux de prédation
Population de prédateurs
taux de reproduction
densité de cerfs
cerfs tués par prédateur
nourriture initiale par cerf
Aire disponible
nourriture par cerf
densité initiale de cerfs
nourriture
taux de régénération des aliments
taux de consommation de nourriture
capacité de production alimentaire
temps de régénération des aliments
consommation de nourriture par cerf


population de cerfs
60000
40000
20000
0
cerfs
1900
1910
1920
1930
1940
1950
Time (Year)


nourriture
100000
80000
60000
40000
20000
0
ton
1900
1910
1920
1930
1940
1950
Time (Year)

**Exemple 5.4.3 Effondrement économique par dépassement du seuil de soutenabilité des ressources non-renouvelables**

Nous considérons ici un modèle très simplifié d'une économie dépendant d'un stock de ressources naturels non-renouvelables. C'est un modèle "à la Hubbert" comme dans l'Exemple 3.8.3 :

— $R(t)$ quantifié la quantité de ressources disponibles.

— $P(t)$ la production économique résultat de l'extraction de ressources.

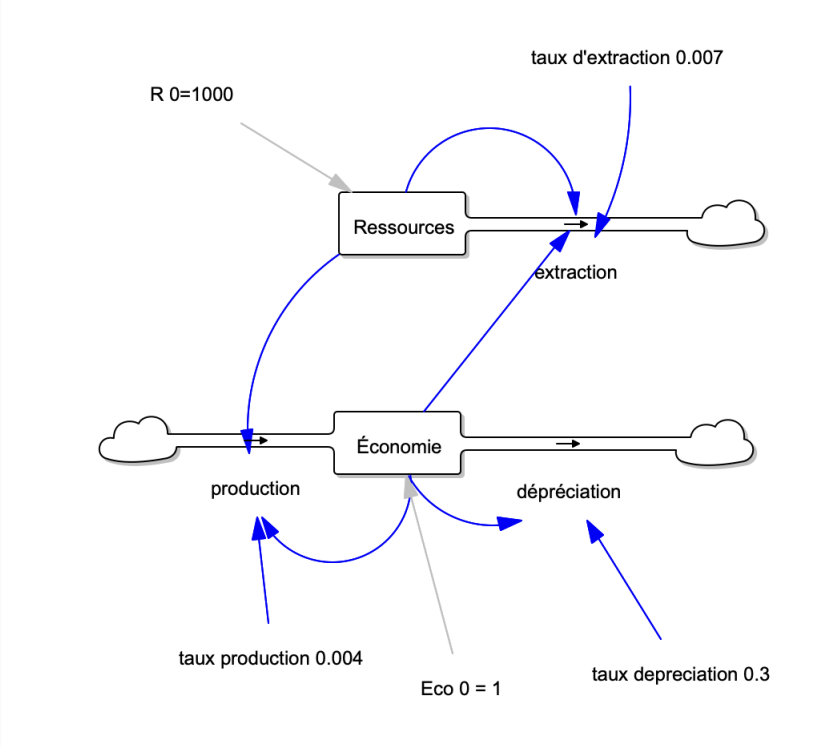
—
$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = -\epsilon.P.R \\ \frac{dP}{dt} = +\beta.P.R - \gamma.P \end{cases}$$

— $\epsilon = 0.007$ de taux d'extraction de ressources par unité de production économique.

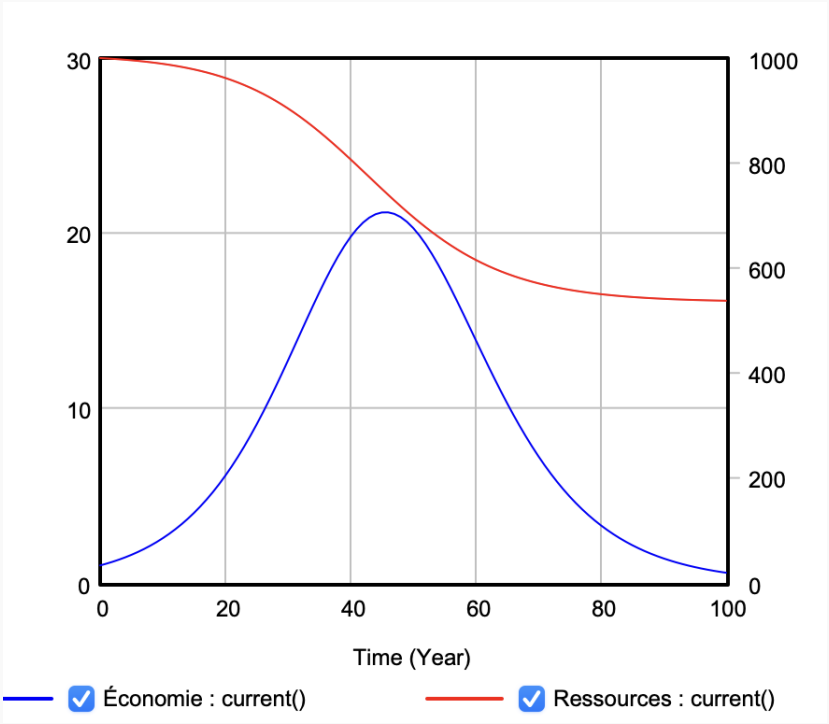
— $\gamma = 0.3$ le taux de dévalorisation par an. On suppose ici de $2.5\%$.

— $\beta = 0.0004$ le taux de croissance de l'économie en fonction de la quantité de ressources encore disponibles. Ici on fixe $\beta = 0.04$.

— On pose $P(0) = 1$, $R_0 = 1000$.




On obtient exactement le comportement prévu par Hubbert dans l'Exemple 3.8.3 :




## 5.5. Modèles proie-prédateur

Jusque ici, nos modèles permettaient de modéliser l'évolution d'une seule quantité - une population donnée. Nous considérons ici des modèles d'interaction entre deux acteurs : proies-prédateurs, population-ressources, etc.

**Exemple 5.5.1 Proie-prédateur**

On considère ici un modèle proie-prédateur avec des serpents - $S$, et des rats - $R$. On utilise les équations de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -a.S + bS.R \\ \frac{dR}{dt} = c.R - d.S.R \end{cases}$$

où :

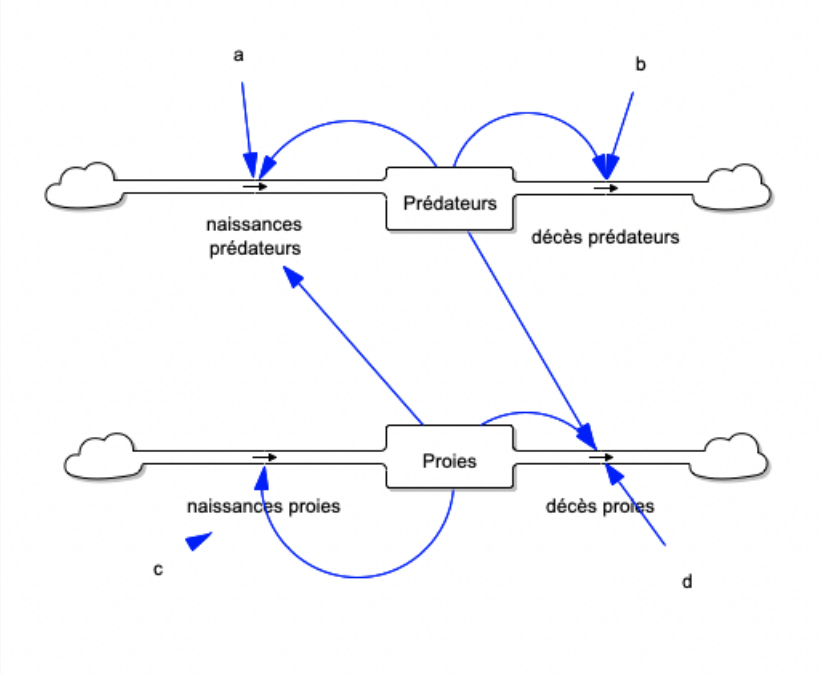
— $a$ est le taux de mortalité des serpents ;

— $b$ taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées ;

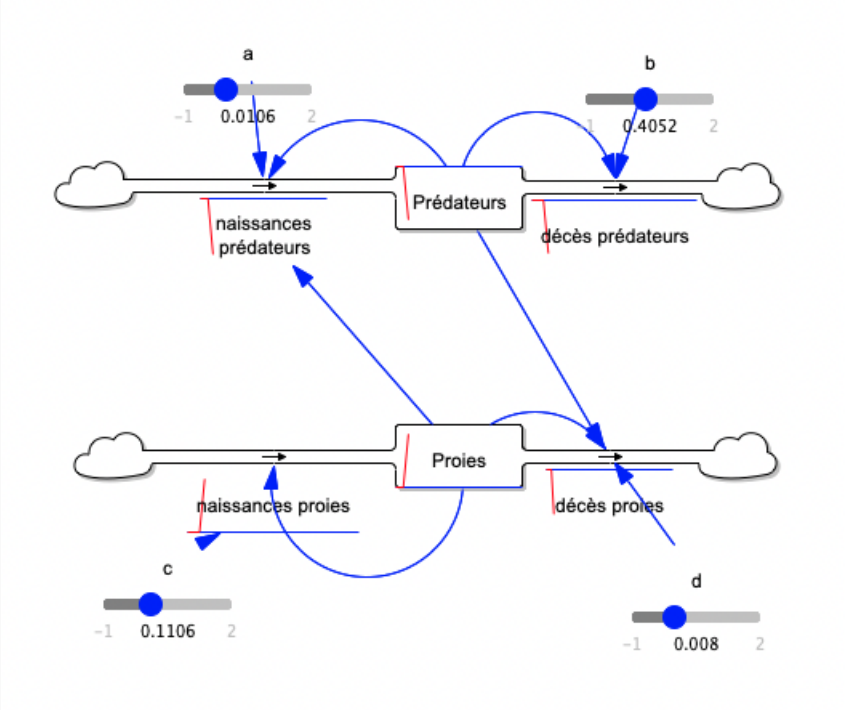
— $c$ est le taux de natalité des rats ;

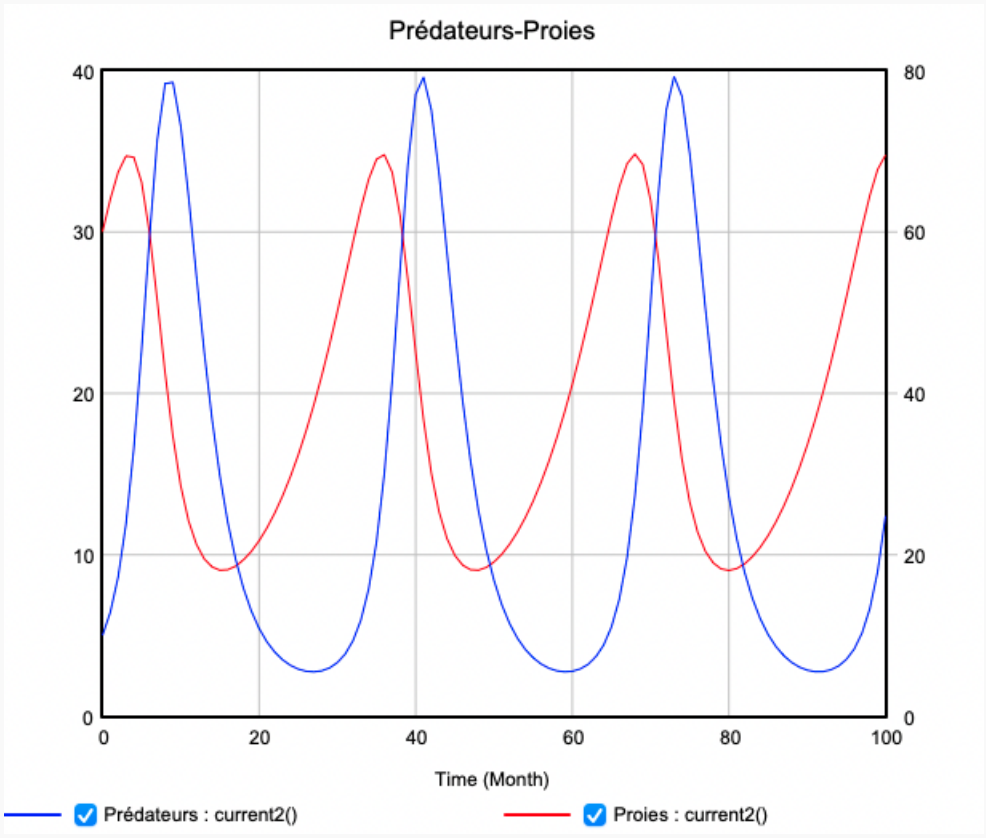
— $d$ est le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés.

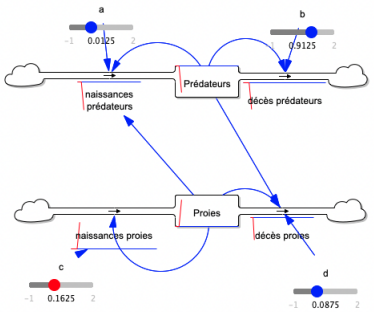
Voici le schéma :

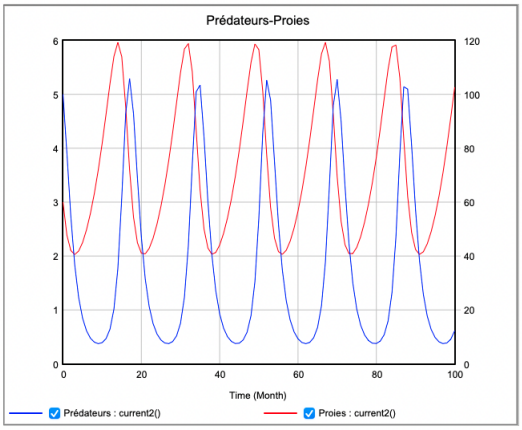



Avec l'option SymthSim de Vensim, on peut varier des paramètres $a$,$b$,$c$,$d$ et regarder les différentes résultats :



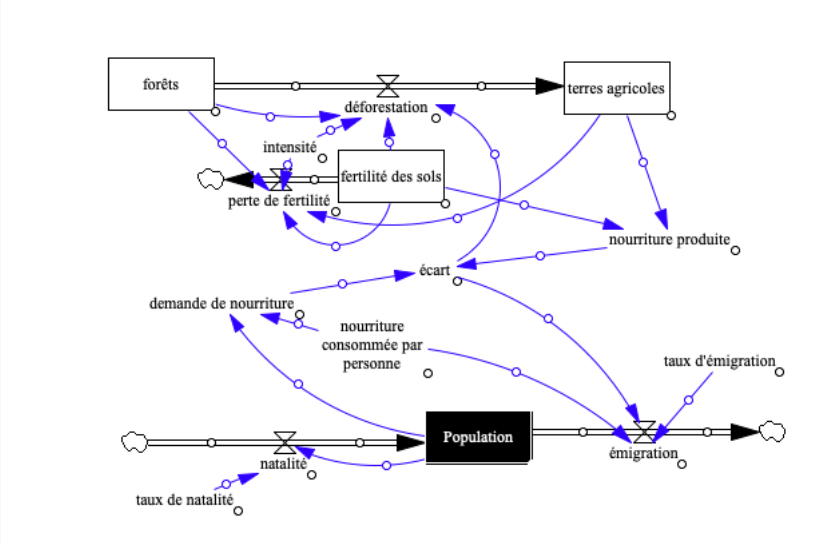


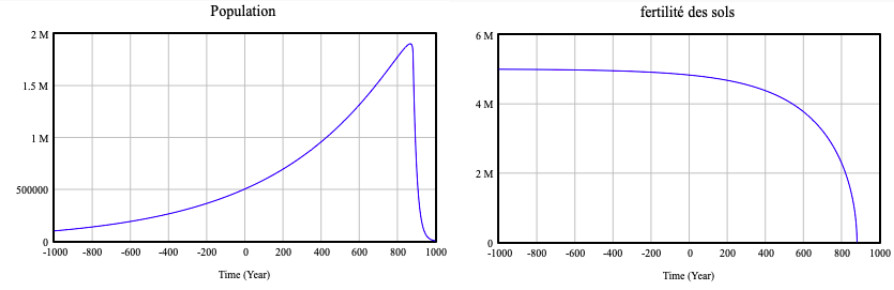



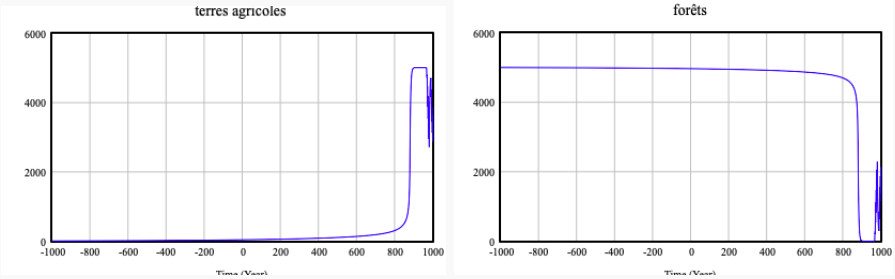




**Exemple 5.5.2 Collapse Civilization**

Collapse of a civilization due to collapse in fertility of lands.




## Exemple 5.5.3

## Exemple 5.5.4 L'effet de Sénèque

## Exemple 5.5.5 Albedo

albedo feedback systems

## 5.6. Modèle épidémiologique SIR

Comme dernier exemple, on décrit le modèle de propagation d'épidémie SIR (susceptibles, infectés,Retirés).

**Exemple 5.6.1 SIR**

On fixe une population de taille $N = 10^6$ et on pose

— $S(t)$= les individus qui ne sont pas infectés par la maladie à l'instant $t$ mais susceptibles d'être contaminés.

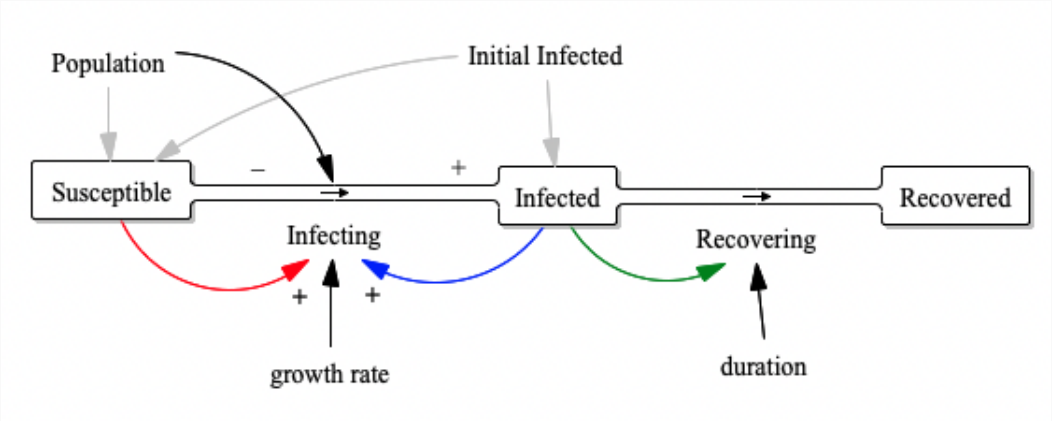
— $I(t)$= les individus qui sont infectés par la maladie au moment $t$.

— $R(t)$= les individus qui ont déjà récupéré de la maladie au moment $t$ et sont devenus immunisés.

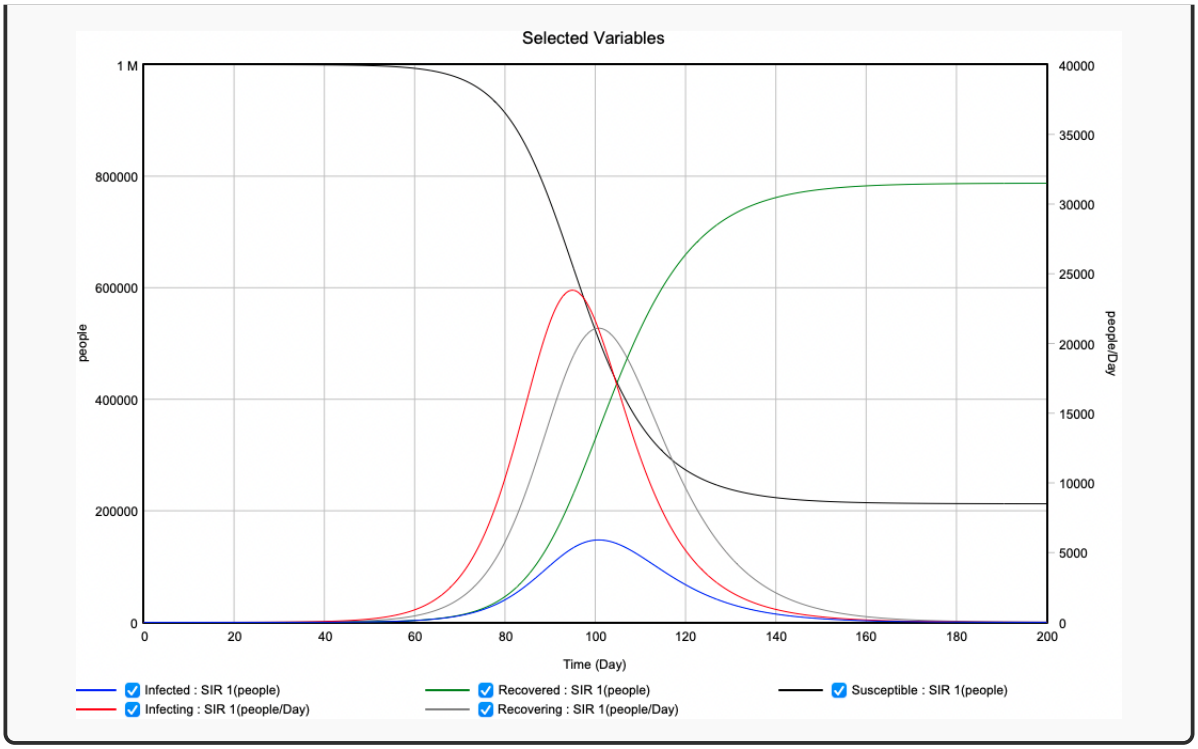
Soit $I(0)$ le nombre de individus infectés au début. Alors, $S(0) = N - I(0)$ et $R(0) = 0$. Pour les équations on suppose le modèle suivante :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta.\frac{S}{N}.I \\ \frac{dI}{dt} = +\beta.\frac{S}{N}.I - \gamma.I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma.I \end{cases}$$

où $\gamma$ est le taux de croissance des contaminations et $\gamma = \frac{1}{d}$ avec $d$ la durée moyenne de récupération. Vous pouvez télécharger un modèle Vensim disponible ici :




Voici une modélisation avec $I(0) = 1$, $d = 7$ jours et $\beta = 0.28$ :


Selected Variables
1 M
800000
600000
400000
200000
0
people
40000
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
people/Day
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Time (Day)
Infected : SIR 1(people)
Infecting : SIR 1(people/Day)
Recovered : SIR 1(people)
Recovering : SIR 1(people/Day)
Susceptible : SIR 1(people)

# 5.7. Exercices

**Exercice 5.7.1**

La croissance de la masse $m(t)$ d'un animal entre sa naissance et sa mort peut être donnée par la fonction suivante

$$m(t) = M.[1 - (1 - \frac{m_0}{M})^{\frac{1}{4}})e^{-at/4.M^{\frac{1}{4}}}]^4$$

où $t$ est le nombre de jours, avec $m_0$ la masse au moment de la naissance, $M$ la masse à l'âge adulte et $a$ une constante qui dépend de l'espèce animale.

1. Montrer que $m(t)$ vérifié l'équation différentielle

$$m'(t) = a.m^{\frac{3}{4}} - \frac{a}{M^{1/4}}m$$

2. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} m(t) = M$.
3. Voici un tableau avec plusieurs espèces.

| Animal | a | $m_0$ | $M$ |
|---|---|---|---|
| Vache | 0.28 | 33.3 Kg | 442 Kg |
| Cochon | 0.31 | 0.90 Kg | 320 Kg |
| Rat | 0.23 | 8 g | 280 g |

Lequel atteint l'âge adulte plus rapidement ?

**Commentaire :** Ici le facteur limite la croissance musculaire infinie est la puissance 3/4. Cela vient de la géométrie fractale des capillaires qui empêche les cellules d'avoir plus d'énergie que le nécessaire. Voir l'article **Ici**.

x